INFORMATYKA I ROK: lista 7
Szeregi liczbowe, potęgowe, trygonometryczne

1. Obliczyć sumy szeregów:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$. Zastosować wzór: $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{\frac{1}{2}}{n+2}$,

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$. Zastosować wzór: $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$. Zastosować wzór na sumę szeregu geometrycznego.

2. Zbadać zbieżność szeregów:

   (a) wykorzystując warunek konieczny:

   $$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}},\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{50n+1},\qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \sqrt[n]{n},\qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n},$$
   $$5)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right).$$

   (b) stosując kryterium całkowe (lub porównawcze):

   $$1)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-2n+1},\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}},\qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3},\qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}.$$

   (c) stosując kryterium ilorazowe:

   $$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n},\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n},\qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{2^n},\qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

   (d) stosując kryterium pierwiastkowe:

   $$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{3^n},\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2}\operatorname{arctg} n)^n,\qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n,\qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n.$$

3. Zbadać zbieżność bezwzgledną i warunkową szeregów liczbowych:

   $$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n\sqrt{n}},\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n2^n},\qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n},\qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$$
   $$5)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}.$$

4. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregów potęgowych:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n2^n}, \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} x^{n+1}, \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{2n}.$$

5. Rozwinąć w szereg Taylora w otoczeniu punktu x_0 funkcję:

   (a) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 1,$

   (b) $f(x) = \cos 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4},$

   (c) $f(x) = e^x, \quad x_0 = 1.$

6. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję:

   (a) $f(x) = e^x,$

   (b) $f(x) = \cosh x,$

   (c) $f(x) = \cos x,$

   (d) $f(x) = \ln(x+1),$

   (e) $f(x) = \sinh x.$

7. Dla podanych niżej funkcji zapisać ich szereg Fouriera w przedziale $(-\pi, \pi)$. W jakich punktach szereg ten jest zbieżny do wartości funkcji? Wyznaczyć sumę szeregu w punktach nieciągłości funkcji i na końcach przedziału.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla} \quad -\pi < x \le 0 \\ 1 & \text{dla} \quad 0 < x \le \pi \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad -\pi < x \le 0 \\ x & \text{dla} \quad 0 < x \le \pi \end{cases}$$

$$f(x) = x^2$$

8. Zapisać cosinusowe i sinusowe szeregi Fouriera dla funkcji zadanych w przedziale $(0, \pi)$, przedłużając je parzyście lub nieparzyście na przedział $(-\pi, \pi)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{dla} \quad \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{dla} \quad \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

$$f(x) = x(\pi - x) \ \text{ dla } \ x \in (0, \pi), \qquad f(x) = \sin\frac{x}{2} \ \text{ dla } \ x \in (0, \pi).$$

9. Zapisać szereg Fouriera podanych funkcji:

$$f(x) = |x| \ \text{ dla } \ x \in (-1, 1), \qquad f(x) = 10 - x \ \text{ dla } \ x \in (5, 15).$$