I Rok Informatyki: wykład 4

Całki oznaczone

Definicja 1. *Ciąg podziałów przedziału* $\langle a, b\rangle$ *punktami:* $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$*, nazywamy ciągiem normalnym podziałów, gdy* $\lim_{x\to\infty} \delta_n = 0$*, gdzie*
$\delta_n = max|x_k - x_{k-1}| = \max_{1\leq k\leq n} |\Delta x_k|$ *- średnica podziału*

Definicja 2. *Niech funkcja* f *będzie określona i ograniczona na przedziale* $\langle a, b\rangle$*.*

Jeżeli dla każdego ciągu normalnego podziałów przedziału $\langle a, b\rangle$ *istnieje taka sama właściwa granica (niezależna od wyboru punktów* $x_k^* \in \langle x_{k-1}, x_k\rangle$*):*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k,$$

to tę granicę nazywamy całką oznaczoną funkcji f *na przedziale* $\langle a, b\rangle$*. Symbolicznie:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k,$$

Ponadto przyjmujemy:

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \text{oraz} \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx, \quad \text{dla } a < b$$

Interpretacja geometryczna

Niech $f(x) > 0$ i ciągła na $\langle a, b\rangle$. Wtedy

$$\int_a^b f(x)dx = |D| \quad - \quad \text{pole trapezu krzywoliniowego,}$$

Twierdzenie 1. *Funkcja ciągła na $\langle a, b\rangle$ jest całkowalna.*

Twierdzenie 2. *[liniowość całki] Niech funkcje f i g będą całkowalne na $\langle a, b\rangle$ i $\alpha, \beta \in R$. Wtedy:*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Twierdzenie 3. *[addytywność całki] Niech funkcja f będzie całkowalna na $\langle a, b\rangle$ i $c \in (a, b)$. Wtedy:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Twierdzenie 4. *[Newtona - Leibniza]*
Jeżeli funkcja f jest ciągła na $\langle a, b\rangle$, to

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji f na $\langle a, b\rangle$.

Przykłady:

Definicja 3. *[wartość średnia]*

$$f_{śr} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Przykład:

Całka funkcji nieparzystej $f(x)$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Całka funkcji parzystej $f(x)$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

ZASTOSOWANIE CAŁEK
Obliczanie pól

Niech funkcje f i g będą ciągłe na $\langle a, b\rangle$ i niech $f(x) < g(x)$ dla każdego $x \in (a, b)$. Pole trapezu krzywoliniowego D ograniczonego wykresami funkcji f i g oraz prostymi $x = a$ i $x = b$ wyraża się wzorem:

$$|D| = \int_{a}^{b} (g(x) - f(x))dx$$

Przykład: