I Rok Informatyki: wykład 5

Całki niewłaściwe

Definicja 1. *[całki niewłaściwej I rodzaju] Niech funkcja f będzie całkowalna na $\langle a, T\rangle$, dla każdego $T > a$.*

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{T\to\infty} \int_a^T f(x)dx$$

Rysunek:

Jeżeli granica po prawej stronie jest skończona, to mówimy że całka niewłaściwa $\int_a^\infty f(x)dx$ jest zbieżna. Jeżeli granica ta nie istnieje lub jest nieskończona, to mówimy, że całka nie istnieje lub jest rozbieżna.

Analogicznie gdy $x \in (-\infty, a\rangle$:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{T\to-\infty} \int_T^a f(x)dx$$

Przykład:

Całkę niewłaściwą na $(-\infty, +\infty)$ określamy następująco:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

Definicja 2. *[całki niewłaściwej II rodzaju] Niech funkcja $f:\ (a,b\rangle \to R$ będzie nieograniczona na $S^+(a,\delta)$ oraz całkowalna na $\langle t,b\rangle$, dla każdego $t \in S^+(a,\delta)$.*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

Analogicznie gdy $f:\ \langle a,b) \to R$ i f - nieograniczona w $S^-(b,\delta)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$$