

I Rok Informatyki: wykład 6
Funkcje dwóch zmiennych

Definicja 1. Funkcją n zmiennych określoną na zbiorze $D \subset \mathbb{R}^n$ o wartościach w \mathbb{R} nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi ze zbioru D dokładnie jednej liczby rzeczywistej. Piszemy:
 $f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \mathbb{R}$.

Zbiór $f(A) = \{f(x_1, x_2, \dots, x_n) : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A \subset D\}$ - nazywamy **obrazem zbioru** A przez odwzorowanie f . Zbiór $f(D)$ - nazywamy **zbiorem wartości** funkcji lub przeciwdziedziną.

Przez **dziedzinę funkcji** rozumiemy tzw. dziedzinę naturalną funkcji t.j. zbiór tych wszystkich punktów z przestrzeni \mathbb{R}^n dla których wzor funkcji ma sens.

Przykłady.

W przypadku funkcji 2 zmiennych możemy przedstawić jej wykres. **Wykresem funkcji** $z = f(x, y)$ nazywamy zbiór:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_f, z = f(x, y)\}.$$

Przykłady:

Definicja 2. [granicy właściwej funkcji n zmiennych w punkcie]

$$\lim_{(P) \rightarrow (P_0)} f(x, y) = g \iff \forall_{(P_n)} \left((P_n) \in D \wedge P_k \neq P_0 \text{ dla } k \in \mathbb{N} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n) = (P_0) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = g \right)$$

Słownie: Funkcja f ma w punkcie P_0 granicę g wtw, gdy dla dowolnego ciągu punktów (P_n) z dziedziny funkcji i różnych od P_0 , zbieżnego do punktu P_0 , odpowiedni ciąg wartości funkcji $f(P_n)$ jest zbieżny do g .

Przykłady:

Definicja 3. [funkcji ciągłej]

Niech $P_0 \in D$. Funkcja f jest ciągła w punkcie P_0 wtw, gdy:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$$

(granica funkcji w punkcie jest równa wartości funkcji w tym punkcie)

Przykład:

Rachunek różniczkowy funkcji 2 (wielu) zmiennych

OZNACZENIA: $Q(P_0, \delta) = \{(x, y) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$

Rysunek:

Definicja 4. [Pochodnej cząstkowej względem x] Niech funkcja f będzie określona na obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$ i niech $(x_0, y_0) \in D$. Pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji f względem x w punkcie (x_0, y_0) określamy wzorem:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Piszemy też: $f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$.

Analogicznie definiujemy pochodną cząstkową 'po y ':

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

i piszemy $f'_{xy} = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Rysunek:

Interpretacja geometryczna

Przykłady:

Pochodna funkcji złożonej

Niech $z = f(x, y)$ gdzie x oraz y są funkcjami pewnej zmiennej t , czyli $x = x(t)$ i $y = y(t)$. Wtedy

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Przykład.

Jeżeli $z = f(x, y)$ gdzie y jest funkcją zmiennej x , czyli $y = y(x)$. Wtedy

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Przykład.

Jeżeli $z = f(x, y)$ gdzie x oraz y są funkcjami zmiennych s i t , czyli $x = x(s, t)$ i $y = y(s, t)$. Wtedy

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Przykład.

Gradient funkcji, pochodna kierunkowa funkcji

Definicja 5. Gradientem funkcji $z = f(x, y)$ w punkcie $P_0 = (x_0, y_0)$ nazywamy wektor mający początek w tym punkcie o współrzędnych będących wartościami pochodnych cząstkowych:

$$\text{grad } f(P_0) = [f'_x(P_0), f'_y(P_0)].$$

Analogicznie dla funkcji 3 zmiennych i punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

$$\text{grad } f(P_0) = [f'_x(P_0), f'_y(P_0), f'_z(P_0)].$$

Rysunek.

Przykłady:

Definicja 6. Pochodną kierunkową funkcji $z = f(x, y)$ w punkcie $P_0 = (x_0, y_0)$ w kierunku wektora $\vec{s} = [\cos \alpha, \cos \beta]$ nazywamy następującą granicę:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{|\overrightarrow{P_0P}|}$$

i oznaczamy: $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}$, gdzie $\vec{s} = \overrightarrow{P_0P}$.

Przykład.

WZÓR

Niech wektor $\vec{s} = [\cos \alpha, \cos \beta]$. Wtedy

$$\frac{df}{d\vec{s}}(P_0) = f'_x(P_0) \cdot \cos \alpha + f'_y(P_0) \cdot \cos \beta.$$

Stąd

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) = \text{grad}f(P_0) \circ [\cos \alpha, \cos \beta].$$

Dowód: Niech $|\overrightarrow{P_0P}| = t$. Wtedy $x = x_0 + t \cos \alpha$, $y = y_0 + t \cos \beta$. Funkcja $f(P)$ jest funkcją złożoną parametru t oraz:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}} = \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{|\overrightarrow{P_0P}|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0).$$

Pochodna φ' wyraża się wzorem: $\varphi'(t) = f'_x \cos \alpha + f'_y \cos \beta$. Stąd wynika WZÓR.
Przykład.

Różniczkowalność funkcji

Definicja 7. Oznaczenia: $\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$.

Funkcję $f(x, y)$ nazywamy **różniczkowalną** w punkcie $P_0 = (x_0, y_0)$ jeżeli istnieją takie liczby A i B , że dla każdego dostatecznie małego θ zachodzi:

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + o(\theta)$$

gdzie $\theta = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ i $\lim_{\theta \rightarrow 0} o(\theta) = 0$

Można wykazać, że jeżeli funkcja jest różniczkowalna w (x_0, y_0) , to $A = f'_x(x_0, y_0)$ i $B = f'_y(x_0, y_0)$.

Definicja 8. Różniczką zupełną funkcji $f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0) nazywamy wyrażenie:

$$df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

Stąd mamy: $\Delta f = df + o(\theta)$ i $\lim_{\theta \rightarrow 0} o(\theta) = 0$. Możemy przyjąć w przybliżeniu:

$$\Delta f \approx df$$

Analogicznie dla funkcji trzech zmiennych:

$$df(x_0, y_0, z_0)(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = f'_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z.$$

Przykład:

Twierdzenie 9. [warunek wystarczający różniczkowalności funkcji]

Niech funkcja f będzie określona na $Q(P_0, \delta)$ i niech pochodne cząstkowe f'_x, f'_y istnieją na $Q(P_0, \delta)$ i są ciągłe w pkt. P_0 . Wtedy funkcja f jest różniczkowalna w tym punkcie.

Interpretacja geometryczna różniczkowalności funkcji 2 zmiennych

Różniczkowalność f w pkt. (x_0, y_0) oznacza, że istnieje płaszczyzna styczna do wykresu tej funkcji w pkt. $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Wtedy $\vec{n} = [-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1]$ - wektor normalny do wykresu funkcji $z = f(x, y)$.

Pochodne wyższych rzędów:

$$\begin{aligned}f''_{xx} &= (f'_x)'_x \text{ czyli } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\f''_{xy} &= (f'_x)'_y \text{ czyli } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\f''_{yy} &= (f'_y)'_y \text{ czyli } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\f''_{yx} &= (f'_y)'_x \text{ czyli } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\f'''_{x^3} &= (f'_x)'_x \text{ czyli } \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \\&\text{itd}\end{aligned}$$

Przykład:

Twierdzenie 10. [Schwarza o pochodnych mieszanych] Niech funkcja f będzie określona na $Q(P_0, \delta)$. Jeżeli pochodne cząstkowe istnieją na $Q(P_0, \delta)$ i są ciągłe w punkcie P_0 , to

$$f''_{xy}(P_0) = f''_{yx}(P_0)$$

Twierdzenie zachodzi dla funkcji n zmiennych i dla pochodnych mieszanych wyższych rzędów.

Przykład:

Różniczki wyższych rzędów

Definicja 11. Różniczką 2 rzędu funkcji $z = f(x, y)$ nazywamy różniczkę jej różniczki 1 rzędu, czyli $d^2 f = d(df)$; różniczką n -tego rzędu funkcji $z = f(x, y)$ nazywamy różniczkę jej różniczki $n - 1$ -ego rzędu, czyli $d^n f = d(d^{n-1} f)$.

Różniczki obliczamy ze wzorów:

$$\begin{aligned}d^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2, \\d^3 f &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\Delta x)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\Delta x)^2 \Delta y + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \Delta x (\Delta y)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\Delta y)^3\end{aligned}$$

Przykład:

Ekstrema funkcji

Definicja 12. Funkcja f ma w pkt. $(x_0, y_0) \in D_f$ minimum (maksimum) lokalne, jeżeli istnieje takie sąsiedztwo $S((x_0, y_0), \delta)$, że w każdym punkcie $(x, y) \in S$ zachodzi warunek:

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \quad (\leq)$$

Twierdzenie 13. [warunek konieczny istnienia ekstremum] Jeżeli f jest różniczkowalna na $Q((x_0, y_0), \delta)$ i ma w pkt. (x_0, y_0) ekstremum lokalne, to

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad i \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Wniosek:

Twierdzenie 14. [warunek wystarczający istnienia ekstremum]

Niech f jest określona na $Q((x_0, y_0), \delta)$ i niech ma ciągłe pochodne cząstkowe II rzędu na Q . Jeżeli

$$1. f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad i \quad f'_y(x_0, y_0) = 0,$$

$$2. W(x_0, y_0) = \det \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} > 0,$$

to funkcja f ma ekstremum lokalne w pkt. (x_0, y_0) i jest to

a) minimum lokalne jeżeli $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$,

b) maksimum lokalne jeżeli $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$.

Uwaga.

Jeżeli $W < 0$ to ekstremum nie istnieje,

$W=0$, to kryterium nie rozstrzyga.

Przykłady: