

I Rok Informatyki: wykład 8
Szeregi trygonometryczne Fouriera

Definicja 1 Szeregiem trygonometrycznym nazywamy szereg postaci:

$$\frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Definicja 2 Szeregiem Fouriera odpowiadającym danej funkcji f , całkownej w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$ nazywamy szereg trygonometryczny, którego współczynniki a_n i b_n dane są wzorami:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Mamy:

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Szereg Fouriera może być zbieżny lub rozbieżny. Ale nawet wtedy gdy jest zbieżny, suma jego nie musi być równa $f(x)$. Kiedy zachodzi równość:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Definicja 3 Funkcja $f(x)$ ograniczona w $\langle a, b \rangle$ nazywa się przedziałami monotoniczną w $\langle a, b \rangle$, jeśli przedział ten można podzielić na skończoną liczbę podprzedziałów, w których $f(x)$ jest monotoniczna.

Definicja 4 Funkcja f spełnia w przedziale $\langle a, b \rangle$ warunki Dirichleta jeśli:

1. jest w $\langle a, b \rangle$ przedziałami monotoniczna,
2. $\forall x_0 \in (a, b) f(x_0) = \frac{1}{2}(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x))$,
3. $f(a) = f(b) = \frac{1}{2}(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow b^-} f(x))$

Twierdzenie 1 *Jeśli funkcja $f(x)$ spełnia w $\langle -\pi, \pi \rangle$ warunki Dirichleta, to szereg Fouriera funkcji f jest zbieżny wszędzie w R do funkcji f .*

Przykład:

Własność:

1) jeżeli funkcja f jest parzysta (czyli $f(x) = f(-x)$), to

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$
$$b_n = 0$$

Wtedy szereg Fouriera jest “szeregiem cosinusów”.

2) jeżeli funkcja f jest nieparzysta (czyli $f(-x) = -f(x)$), to

$$a_n = 0$$
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx,$$

Wtedy szereg Fouriera jest “szeregiem sinusów”.

Rozwijanie dowolnej funkcji w samych szereg cosinusów lub sinusów

Jeżeli funkcja f spełnia warunki Dirichleta w $\langle 0, \pi \rangle$ i tylko w tym przedziale chcemy ją rozwinąć, to możemy przedłużyć ją na cały przedział $\langle -\pi, \pi \rangle$ w sposób parzysty lub nieparzysty.

Przykład:

Szereg Fouriera w przedziale $\langle -h, h \rangle$, $h > 0$

Niech funkcja f całkowalna w $\langle -h, h \rangle$.

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{h} + b_n \sin \frac{n\pi x}{h} \right)$$

$$a_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^h f(x) \cos \frac{n\pi x}{h} dx, \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^h f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx, \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$