

I Rok, STUDIA NIESTACJONARNE, LISTA 2
Ciągi, granica funkcji, ciągłość funkcji.

1. Zbadać monotoniczność ciągów:

$$a_n = \frac{4n+1}{n+1}, \quad b_n = \sqrt{n^2+2n} - n, \quad c_n = \cos(n\pi), \quad d_n = \frac{100^n}{n!}$$

2. Obliczyć granice ciągów:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4n^2 - 3n}{5 - 2n^2}, & b_n &= \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{2 + 5n}, & c_n &= 5 + n^2 - 3n^3, & d_n &= \frac{2n - 1}{5 - \sqrt{n}}, \\ e_n &= \frac{2^n + (-1)^n}{2^n + 1}, & f_n &= \sqrt{n^2 + n} - n, & g_n &= \sqrt[n]{2^n + 6^n + 10^n}, & h_n &= \frac{2^{n+1} + 3^n}{2^n + 3^{n+1}}, \\ i_n &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{3n}, & j_n &= \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n}, & k_n &= \left(\frac{n+5}{n}\right)^{3-n}, & l_n &= \frac{\sin^2 n + 4n}{3n - 2}. \end{aligned}$$

Wsk. dla l_n, g_n skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach.

3. Obliczyć, jeśli istnieją, granice

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x); & \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - 5^x}{2^x + 5^x}; & \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - 5x - 10x^2}{3x + 15}; & \quad d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{1 + x^2} \\ e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 1}{2x + 1}; & \quad f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x + 1}; & \quad g) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}; & \quad h) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}; \\ i) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 6}; & \quad j) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x + 6}{x^3 + 8}; & \quad k) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}; & \quad l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}; \end{aligned}$$

4. Obliczyć, jeśli istnieją, granice

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{x-1}}; \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x-1}};$$

5. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach obliczyć granice podanych funkcji:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \sin x}{x^2}; \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-x}(2 + \cos x);$$

6. Zbadać ciągłość wskazanych funkcji

$$\begin{aligned} a) f(x) &= \begin{cases} x & \text{dla } x \leq 0, \\ \frac{x}{x-1} & \text{dla } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{x} & \text{dla } x \geq 1, \end{cases} & \quad b) f(x) &= \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} & \text{dla } x < 0, \\ x & \text{dla } x \geq 0, \end{cases} \\ c) f(x) &= \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & \text{dla } x \neq 0, \\ 1 & \text{dla } x = 0, \end{cases} & \quad d) f(x) &= \begin{cases} 2 & \text{dla } x = 0 \text{ lub } x = \pm 2, \\ 4 - x^2 & \text{dla } 0 < |x| < 2, \\ 4 & \text{dla } |x| > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

7. Dobrać parametr $a \in \mathbb{R}$ tak, aby podane funkcje były ciągłe:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{dla } x \neq 1, \\ a & \text{dla } x = 1, \end{cases}, \quad b) g(x) = \begin{cases} 5^{1-x} & \text{dla } x \leq 0, \\ a & \text{dla } x > 0, \end{cases},$$

$$c) h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^3-1} & \text{dla } x \neq 1, \\ a & \text{dla } x = 1, \end{cases}, \quad d) k(x) = \begin{cases} x-a & \text{dla } x < 10, \\ \log x & \text{dla } x \geq 10. \end{cases},$$

8. Wyznaczyć asymptoty ukośne oraz pionowe (jeśli istnieją) następujących funkcji:

$$a) f(x) = \frac{x}{1-x} \quad b) f(x) = \frac{x^3+8}{x^2-4} \quad c) f(x) = \frac{x^3}{x-1}, \quad d) f(x) = \frac{2-x}{x^2-3},$$
$$e) f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}, \quad f) f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad g) f(x) = \frac{x^2-x}{x-3}.$$