

I Rok, STUDIA NIESTACJONARNE, LISTA 4

Całki nieoznaczone, całki oznaczone

1. Obliczyć:

$$\int \frac{2x^3 - 3x\sqrt{x} + 5x\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt{x}} dx, \quad \int \left(\frac{4}{\cos^2 x} - \frac{3}{1+x^2} \right) dx, \quad \int \frac{9-x}{3-\sqrt{x}} dx,$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx, \quad \int \operatorname{tg}^2 x dx, \quad \int \frac{e^x + 2e^{2x} - 5^x}{e^x} dx, \quad \int \frac{4x^2 - 1}{2x + 1} dx.$$

2. Obliczyć wykorzystując metodę podstawiania:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{2-x^2}} dx, \quad \int \sin\left(\frac{1}{2}x\right) dx, \quad \int \frac{(\arcsin x)^6}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}, \quad \int x\sqrt{x^2-1} dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(3x+2)^2}},$$

$$\int x e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{2x^3}{\sin^2(x^4+2)} dx.$$

3. Obliczyć całki za pomocą metody całkowania przez części:

$$\int x \cos x dx, \quad \int x^2 \sin x dx, \quad \int e^x \cos x dx,$$

$$\int \sin(\ln x) dx, \quad \int x^5 \operatorname{arctg} x dx, \quad \int \arcsin x dx,$$

$$\int x^2 \ln^2 x dx, \quad \int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} dx, \quad \int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$$

4. Obliczyć całki z funkcji wymiernych:

$$\int \frac{3x+1}{x+1} dx, \quad \int \frac{x}{(x-1)(x+2)} dx, \quad \int \frac{dx}{x^4+3x^2}, \quad \int \frac{dx}{x^2+2x+5},$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+x+1} dx, \quad \int \frac{x+2}{x^3-27} dx.$$

5. Obliczyć całki z funkcji niewymiernych:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6x-8-x^2}}, \quad \int \sqrt{3+2x-x^2} dx, \quad \int \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+4x+8}} dx,$$

$$\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{4+x-x^2}} dx, \quad \int \sqrt{x^2-2x-1} dx.$$

6. Obliczyć całki oznaczone:

$$\int_1^4 \sqrt{x} dx, \quad \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dt}{4+t^2}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}, \quad \int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx.$$

7. Obliczyć wartości średnie podanych funkcji na wskazanych przedziałach:

(a) $f(x) = x^2, \quad \langle -1, 1 \rangle,$

(b) $f(x) = \ln x \quad \langle 1, e \rangle,$

(c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \langle -1, 1 \rangle,$

(d) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \langle 0, 1 \rangle.$

8. Uzasadnić (bez obliczania całek) równości:

$$\int_{-1}^1 e^{x^2} \sin x dx = 0; \quad \int_{-2}^2 x \sin^3 x dx = 2 \int_0^2 x \sin^3 x dx$$

9. Obliczyć pola obszarów ograniczonych liniami:

(a) parabolą $y = 6x - x^2$ i osią Ox ,

(b) hiperbolą $xy = 6$ i prostą $y = 7 - x$,

(c) hiperbolą $xy = 4$ i prostymi $x = 1, x = 4, y = 0$,

(d) $y = \ln x, x = e, y = 0$,

(e) parabolami: $y = x^2$ i $y = 2 - x^2$,

(f) parabolą $y = x^2 + 4x$ i prostą $y = x + 4$.