I Rok STUDIA NIESTACJONARNE: wykład 2

Pochodna funkcji

Niech f jest określona w $Q(x_0, \delta)$ i $x \in Q(x_0, \delta)$.
Oznaczenia:

$$\begin{aligned}
\Delta x &= x - x_0 \\
\Delta y &= y - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \text{iloraz różnicowy} \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= tg\beta, \ \text{ gdzie } \ \beta - \text{kąt nachylenia siecznej do osi Ox}
\end{aligned}$$

Definicja 1. *pochodnej*

$$f'(x_0) \ = \ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

o ile granica ta jest skończona. Pochodną oznaczamy również symbolem $\frac{dy}{dx}$.

Interpretacja geometryczna:

$$f'(x_0) = tg\alpha, \ \text{ gdzie } \ \alpha - \text{kąt nachylenia stycznej do osi Ox}$$

Równanie stycznej do krzywej $y = f(x)$ w pkt. $(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Przykład:

Definicja 2. *Funkcja f jest różniczkowalna w pkt. x_0 wtw, gdy istnieje stała A taka, że:*

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \theta(\Delta x)$$
$$\textit{gdzie } \theta(\Delta x) \to 0 \quad \textit{gdy } \Delta x \to 0$$

Twierdzenie 3. *Funkcja f jest różniczkowalna w pkt. x_0 wtw, gdy istnieje pochodna w tym punkcie. Wtedy $A = f'(x_0)$.*

Mamy:
$\Delta y = \underbrace{f'(x_0) \cdot \Delta x}_{df} + \theta(\Delta x)$.

Różniczkę zupełną df wykorzystujemy do obliczeń przybliżonych, czyli:

$$\Delta y \approx df$$
$$f(x) \approx f(x_0) + df$$

Przykład:

PODSTAWOWE WZORY

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \qquad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$
$$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \qquad (c)' = 0$$
$$(c \cdot f)' = c \cdot f' \qquad (x^r)' = rx^{r-1}$$
$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$
$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$
$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \qquad (e^x)' = e^x$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$
$$(\sinh x)' = \cosh x \qquad (\cosh x)' = \sinh x$$

Przykłady:

Pochodną funkcji złożonej $f(g(x))$ wyznaczamy ze wzoru:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Przykłady:

Twierdzenie 4. *warunek konieczny różniczkowalności funkcji.*
Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w pkt. x_0, to jest w tym punkcie ciągła.

Definicja 5. *pochodnych wyższych rzędów*

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= (f'(x))', \ \text{\emph{czyli}} \ \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) \\
&\vdots \\
f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))', \ \text{\emph{czyli}} \ \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)
\end{aligned}
$$

Analogicznie definiujemy różniczki wyższych rzędów:

$$
\begin{aligned}
d^2 f &= f''(x) \cdot (\Delta x)^2 \\
&\vdots \\
d^n f &= f^{(n)}(x) \cdot (\Delta x)^n
\end{aligned}
$$

Twierdzenie 6. *[Rolle'a]*
Jeżeli f jest ciągła na $< a, b >$, ma pochodną na (a, b) i $f(a) = f(b)$, to

$$\exists_{c \in (a,b)} \ f'(c) = 0$$

Twierdzenie 7. *[Lagrange'a]*
Jeżeli f jest ciągła na $< a, b >$ i ma pochodną na (a, b), to

$$\exists_{c \in (a,b)} \ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Wnioski:

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 0 \quad \text{dla} \ x \in (a,b) \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x) - \text{stała w } (a,b) \\
f'(x) > 0 \quad \text{dla} \ x \in (a,b) \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x) - \text{rosnąca w } (a,b) \\
f'(x) < 0 \quad \text{dla} \ x \in (a,b) \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x) - \text{malejąca w } (a,b)
\end{aligned}
$$

Ekstremum funkcji

Definicja 8. *Funkcja f ma w pkt. x_0 maksimum (minimum) lokalne, jeżeli istnieje sąsiedztwo $S(x_0, \delta)$, takie że dla każdego $x \in S(x_0, \delta)$ spełniona jest nierówność: $f(x) \leq f(x_0) \qquad (f(x) \geq f(x_0))$*

Twierdzenie 9. *[warunek konieczny istnienia ekstremum]*
Jeżeli funkcja f ma w pkt. x_0 ekstremum i ma w tym punkcie pochodną, to $f'(x_0) = 0$. Punkt zerowanie się pochodnej nazywamy punktem stacjonarnym.

Wniosek: Funkcja może mieć ekstremum jedynie w tych punktach, w których pochodna nie istnieje albo jest równa 0.

Twierdzenie 10. *warunek wystarczający istnienia ekstremum*
Jeżeli funkcja f jest ciągła w pkt. x_0 i posiada pochodną w $S(x_0, \delta)$ oraz

$$\begin{array}{lll} f'(x) < 0 & \textit{dla} & x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ f'(x) > 0 & \textit{dla} & x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{array}$$

to ma w x_0 minimum lokalne. Jeżeli zachodzą nierónośći:

$$\begin{array}{lll} f'(x) > 0 & \textit{dla} & x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ f'(x) < 0 & \textit{dla} & x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{array}$$

to funkcja ma w x_0 maksimum właściwe.

Przykład:

Twierdzenie 11. *[reguła de l'Hospitala]*
Jeżeli: 1. dziedziny funkcji $\frac{f}{g}$ *i* $\frac{f'}{g'}$ *zawierają pewne* $S(x_0, \delta)$

2. a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ *albo b)* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

3. istnieje granica $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *(właściwa lub niewłaściwa),*

to istnieje również granica $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *i zachodzi równość:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Twierdzenie powyższe jest również prawdziwe dla granic jednostronnych i gdy $x \to \pm\infty$.
Przykłady:

Badanie funkcji

1. dziedzina funkcji
2. cechy szczególne: miejsca zerowe, parzystość, nieparzystość, okresowość, itd.
3. asymptoty
4. badanie y'
5. tabelka

6. wykres

Przykład: