I Rok STUDIA NIESTACJONARNE: wykład 1
**Ciągi liczbowe, granica ciągu**

**Definicja 1.** *Ciąg liczbowy jest to funkcja, która każdej liczbie naturalnej* $n$ *przyporządkowuje pewną liczbę rzeczywistą.*

$$\begin{aligned} &1 \to a_1 \\ &2 \to a_2 \\ &\vdots \\ &n \to a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

*czyli* $(a_n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Oznaczenia:

$$\begin{aligned} &a_n - \text{ n-ty wyraz ciągu} \\ &(a_n) - \text{ ciąg} \\ &\{a_n\} - \text{ zbiór wyrazów ciągu } (a_n) \end{aligned}$$

Np.

**Definicja 2.** *Ciąg* $(a_n)$ *jest*
*a) ograniczony z góry wtw, gdy* $\exists_{M\in\mathbf{R}}\ \forall_{n\in\mathbf{N}}\ \ a_n \le M$
*b) ograniczony z dołu wtw, gdy* $\exists_{m\in\mathbf{R}}\ \forall_{n\in\mathbf{N}}\ \ m \le a_n$
*c) ograniczony wtw, gdy jest ograniczony z dołu i z góry.*

Przykład:

**Definicja 3.** *Ciąg* $(a_n)$ *jest:*
*a) rosnący wtw, gdy* $\forall_{n\in\mathbf{N}}\ \ a_n < a_{n+1}$
*b) malejący wtw, gdy* $\forall_{n\in\mathbf{N}}\ \ a_n > a_{n+1}$

Zadanie.

**Definicja 4.** *Ciąg* $(a_n)$ *jest zbieżny do granicy właściwej* $a$ *wtw, gdy wraz ze wzrostem wskaźnika* $n$ *wyrazy* $(a_n)$ *różnią się coraz mniej od* $a$.
*Symbolicznie:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall_{\xi>0}\, \exists_{n_0\in\mathbf{N}}\, \forall_{n\in\mathbf{N}}\, (n > n_0 \;\Rightarrow\; |a_n - a| < \xi)$$

Przykład:

**Twierdzenie 5.** *Jeżeli ciągi $(a_n)$ i $(b_n)$ są zbieżne, to:*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) &= \lim_{n\to\infty}(a_n) \pm \lim_{n\to\infty}(b_n)\\
\lim_{n\to\infty}(c \cdot b_n) &= c \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n),\ c \in R\\
\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) &= \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n)\\
\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) &= \frac{\lim_{n\to\infty}(a_n)}{\lim_{n\to\infty}(b_n)},\quad \textit{dla}\ \ b_n \neq 0,\ \lim_{n\to\infty}(b_n) \neq 0,\\
\lim_{n\to\infty}(a_n)^p &= \left(\lim_{n\to\infty}(a_n)\right)^p,\ p \neq 0\\
\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{(a_n)} &= \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty}(a_n)},\ k \in N\backslash 1.
\end{aligned}$$

Przykłady:

**Definicja 6.** *[ granic niewłaściwych]*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff \forall_{M>0}\ \exists_{n_0\in\mathbf{N}}\ \forall_{n\in\mathbf{N}}\ (n > n_0 \ \Rightarrow\ a_n > M)$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff \forall_{m<0}\ \exists_{n_0\in\mathbf{N}}\ \forall_{n\in\mathbf{N}}\ (n > n_0 \ \Rightarrow\ a_n < m).$$

Rysunek:

# WYRAŻENIA NIEOZNACZONE:

**podstawowe:** $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$
**wykładnicze:** $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$.

Przykłady:

**Twierdzenie 7.** *[Tw. o granicy ciągu geometrycznego]*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & dla \quad |q| < 1 \\ 1 & dla \quad q = 1 \\ \infty & dla \quad q > 1 \\ nie\, istnieje & dla \quad q < -1 \end{cases}$$

Przykład:

**Twierdzenie 8.** *[Tw. o trzech ciągach]*

*Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$ *i od pewnego* $n$ *zachodzi* $a_n \le b_n \le c_n$,
*to* $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.

Przykład:

**Twierdzenie 9.**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1 \qquad \textit{dla } c > 0.$$

Dowód:

**Twierdzenie 10.**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \qquad .$$

**Twierdzenie 11.** *Ciąg rosnący i ograniczony z góry jest zbieżny.*

**Twierdzenie 12.** *Ciąg* $(1+\frac{1}{n})^n$ *jest rosnący i ograniczony z góry, a więc jest zbieżny oraz*

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

.

Przykłady:

## Granica funkcji, ciągłość funkcji, asymptoty funkcji

**Definicja 13.** *otoczenia punktu*

$$Q(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

**Definicja 14.** *sąsiedztwa punktu*

$$S(x_0, \delta) = Q(x_0, \delta) \backslash x_0$$

**Definicja 15.** *[Df. granicy (właściwej) funkcji wg Heine'go]*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \iff \forall_{(x_n)} \left( \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x) = g \right)$$

Funkcja ma w punkcie $x_0$ granicę $g$, gdy jej wartości odpowiadające argumentom dążącym do punktu $x_0$, dążą do liczby $g$.

**Definicja 16.** *[Df. granicy (właściwej) funkcji w punkcie wg Cauchy'ego]*
*Niech $f$ - określona w $S(x_0, \delta)$*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \iff \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D_f} \left( 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon \right)$$

**Definicja 17.** *[Df. granicy (właściwej) funkcji w nieskończoności wg Cauchy'ego]*
*Niech $f$ - określona w $(M, \infty)$ dla dowolnego $M > 0$.*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = g \iff \forall_{\epsilon>0}\, \exists_{\Delta>0}\, \forall_{x\in D_f}\, (x > \Delta \;\Rightarrow\; |f(x) - g| < \epsilon)$$

Analogicznie definiujemy granicę właściwą w $-\infty$.

**Twierdzenie 18.** *[o arytmetyce granic właściwych funkcji]*
*Jeżeli funkcje $f$ i $g$ mają granice właściwe w punkcie $x_0$, to*

1. $\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$,
2. $\lim_{x\to x_0} (cf(x)) = c\,(\lim_{x\to x_0} f(x))$,
3. $\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$,
4. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, *o ile* $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$,
5. $\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = (\lim_{x\to x_0} f(x))^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$.

Przykłady:

**Twierdzenie 19.** *[o trzech funkcjach]*

$$\textit{Jeżeli}\ \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = g \quad \textit{oraz dla } x \in S(x_0, \delta) \textit{ zachodzi } f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$$to \lim_{x\to x_0} g(x) = g.$$

Twierdzenie zachodzi również, gdy $x \to \infty$ i $x \to -\infty$.
Przykład:

**Twierdzenie 20.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Dowód:

**Twierdzenie 21.**

$$\lim_{x\to \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

Przykład:

## GRANICE NIEWŁAŚCIWE FUNKCJI

**Definicja 22.** *[Df. granicy niewłaściwej funkcji w punkcie wg Cauchy'ego]*
*Niech $f$ - określona w $S(x_0, \delta)$.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall_{M>0} \, \exists_{\delta>0} \, \forall_{x \in D_f} \, (|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M)$$

Analogicznie definiujemy granicę niewłaściwą $-\infty$.
Rysunek:

**Definicja 23.** *[Df. granicy niewłaściwej funkcji w nieskończoności wg Cauchy'ego]*
*Niech $f$ - określona w $(M, +\infty)$.*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall_{M>0} \, \exists_{\Delta>0} \, \forall_{x \in D_f} \, (x > \Delta \Rightarrow f(x) > M)$$

Analogicznie definiujemy granicę niewłaściwą $\infty$ gdy $x \to -\infty$ jak również $-\infty$ gdy $x \to +\infty$ lub $x \to -\infty$. Rysunek:

**Twierdzenie 24.** *[o granicy funkcji złożonej]*

*Jeżeli* $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\quad y_0 \neq f(x)$ *dla k.* $x \in S(x_0, \delta)$ *i* $\lim_{y \to y_0} g(y) = g$
*to* $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g$.

Przykład:

**Definicja 25.** *[dotycząca granic jednostronnych]*
*Niech f - określona w* $S^{-}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=g \iff \forall_{\epsilon>0}\,\exists_{\delta>0}\,\forall_{x\in D_f}\ (-\delta<(x-x_0)<0 \Rightarrow |f(x)-g|<\epsilon)$$

*Niech f - określona w* $S^{+}(x_0,\delta)=(x_0,x_0+\delta)$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=g \iff \forall_{\epsilon>0}\,\exists_{\delta>0}\,\forall_{x\in D_f}\ (0<(x-x_0)<\delta \Rightarrow |f(x)-g|<\epsilon)$$

Granica obustronna istnieje wtw, gdy istnieją granice jednostronne i są sobie równe.
Przykład:

**Definicja 26.** *Funkcja* $f$ *jest ciągła w punkcie* $x_0$*, gdy:*
*1) jest określona w punkcie* $x_0$*, czyli* $x_0\in D_f$
*2) istnieje* $\lim_{x\to x_0} f(x)$
*3)* $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Przykłady:

## Asymptoty

**Definicja 27.** *Niech* $x_0 \notin D_f$. *Prosta o równaniu* $x = x_0$ *jest asymptotą pionową krzywej* $y = f(x)$ *wtw, gdy istnieje granica niewłaściwa*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \ \ \textit{lub} \ \ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

Przykład:

**Definicja 28.** *Prostą $y = ax + b$ nazywamy asymptotą ukośną (albo poziomą, gdy $a = 0$) krzywej $y = f(x)$, gdy:*

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

**Twierdzenie 29.** *Jeżeli krzywa $y = f(x)$ ma asymptotę ukośną o równaniu $y = ax + b$, to:*

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad i \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax)$$

Przykład: