I Rok STUDIA NIESTACJONARNE: wykład 3
Całki nieoznaczone, całki oznaczone

Definicja 1. *Funkcja $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ na przedziale I, jeżeli*

$$F'(x) = f(x) \quad \textit{dla każdego} \quad x \in I.$$

Twierdzenie 1. *[warunek wystarczający istnienia funkcji pierwotnej] Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale I , to ma funkcję pierwotną na tym przedziale.*

Twierdzenie 2. *Jeżeli funkcja $f(x)$ ma funkcję pierwotną $F(x)$, to każda inna funkcja pierwotna jest postaci $F(x) + c$, $c =$const.*

Definicja 2. *Zbiór wszystkich funkcji pierwotnych $F(x)$ danej funkcji $f(x)$ na przedziale I nazywamy całką nieoznaczoną funkcji $f(x)$ na tym przedziale. Symbolicznie:*

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Twierdzenia.

$$\begin{aligned}
(\int f(x))'dx &= f(x), \\
\int f'(x)dx &= f(x) + c, \\
\int (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x))dx &= \alpha \int f_1(x)dx + \beta \int f_2(x)dx
\end{aligned}$$

PODSTAWOWE WZORY

$$
\begin{aligned}
\int 0\,dx &= c \\
\int x^n\,dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad \text{dla} \;\; n \neq -1 \\
\int \frac{1}{x}\,dx &= \ln|x| + c, \quad \text{dla} \;\; n \neq 0 \\
\int a^x\,dx &= \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad \text{dla} \;\; a > 0, \quad a \neq 1 \\
\int e^x\,dx &= e^x + c \\
\int \sin x\,dx &= -\cos x + c \\
\int \cos x\,dx &= \sin x + c \\
\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx &= -\mathrm{ctg} x + c \\
\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx &= \mathrm{tg} x + c \\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \mathrm{arctg} x + c \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin x + c \\
\int \sinh x\,dx &= \cosh x + c \\
\int coshx\,dx &= \sinh x + c
\end{aligned}
$$

Przykłady:

Metoda całkowania przez części

Jeżeli funkcje u i v mają ciągłe pochodne na przedziale I, to:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx \quad \text{dla każdego } x \in I$$

Dowód:

$$\begin{aligned}
(u(x)v(x))' &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
\int (u(x)v(x))'\,dx &= \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx \\
u(x)v(x) &= \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx
\end{aligned}$$

Przykłady:

Wzory rekurencyjne:

$$\begin{aligned}
\int \sin^n x\,dx &= -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx, \quad n \geq 2, \\
\int \cos^n x\,dx &= \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx, \quad n \geq 2,
\end{aligned}$$

Metoda całkowania przez podstawianie

Jeżeli funkcje $f(t)$ i $t = g(x)$ mają ciągłe pochodne na I, to:

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(t)\, dt$$

Przykłady:

Całkowanie funkcji wymiernych

Niech

$$W_n(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$$
$$W_m(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m$$

Funkcja wymierna jest to funkcja postaci:

$$f(x) = \frac{W_n(x)}{W_m(x)}$$

Kolejniść postępowania:

1. Jeżeli $n \geq m$ to dzielimy wielomiany z resztą, czyli otrzymujemy:

$$\frac{W_n(x)}{W_m(x)} = Q_{n-m} + \frac{R_s(x)}{W_m(x)}, \text{ gdzie } s < m.$$

2. Mianownik, czyli wielomian $W_m(x)$ rozkładamy na czynniki. W zbiorze R są to czynniki liniowe: $(x - d)$ lub $ax^2 + bx + c$.

3. Funkcję $\frac{R_s(x)}{W_m(x)}$ rozkładamy na ułamki proste.Są to wyrażenia postaci:

$$\frac{A}{(x-d)^n} \qquad \frac{Bx + C}{(ax^2 + bx + c)^n}, \text{ gdy } \Delta < 0.$$

Przykłady:

Całkowanie funkcji niewymiernych

Wzory:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx &= \arcsin\frac{x}{a}+c \\
\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a})+c \\
\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx &= \frac{1}{2}(-x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a})+c \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}\,dx &= \ln|x+\sqrt{x^2+k}|+c \\
\int \sqrt{x^2+k}\,dx &= \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+k}+k\ln|x+\sqrt{x^2+k}|)+c \\
\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+k}}\,dx &= \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+k}-k\ln|x+\sqrt{x^2+k}|)+c \\
\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\,dx &= 2\sqrt{u(x)}+c \\
\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx &= W_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+A\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \quad \text{gdzie } \ a,b,c,A\in R
\end{aligned}$$

Przykłady:

Całki oznaczone

Definicja 3. *Ciąg podziałów przedziału $\langle a, b\rangle$ punktami: $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, nazywamy ciągiem normalnym podziałów, gdy $\lim_{x\to\infty} \delta_n = 0$, gdzie*
$\delta_n = max|x_k - x_{k-1}| = \max_{1\leq k\leq n} |\Delta x_k|$ *- średnica podziału*

Definicja 4. *Niech funkcja f będzie określona i ograniczona na przedziale $\langle a, b\rangle$.*

Jeżeli dla każdego ciągu normalnego podziałów przedziału $\langle a, b\rangle$ istnieje taka sama właściwa granica (niezależna od wyboru punktów $x_k^* \in \langle x_{k-1}, x_k\rangle$):

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k^*)\Delta x_k,$$

to tę granicę nazywamy całką oznaczoną funkcji f na przedziale $\langle a, b\rangle$. Symbolicznie:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k^*)\Delta x_k,$$

Ponadto przyjmujemy:

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \text{oraz} \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx, \quad \text{dla } \ a < b$$

Interpretacja geometryczna

Niech $f(x) > 0$ i ciągła na $\langle a, b\rangle$. Wtedy

$$\int_a^b f(x)dx = |D| \quad - \quad \text{pole trapezu krzywoliniowego},$$

Twierdzenie 3. *Funkcja ciągła na $\langle a,b\rangle$ jest całkowalna.*

Twierdzenie 4. *[liniowość całki] Niech funkcje f i g będą całkowalne na $\langle a,b\rangle$ i $\alpha,\beta \in R$. Wtedy:*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Twierdzenie 5. *[addytywność całki] Niech funkcja f będzie całkowalna na $\langle a,b\rangle$ i $c \in (a,b)$. Wtedy:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Twierdzenie 6. *[Newtona - Leibniza]*
Jeżeli funkcja f jest ciągła na $\langle a,b\rangle$, to

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji f na $\langle a,b\rangle$.

Przykłady:

Definicja 5. *[wartość średnia]*

$$f_{śr} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Przykład:

Całka funkcji nieparzystej $f(x)$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Całka funkcji parzystej $f(x)$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

ZASTOSOWANIE CAŁEK
Obliczanie pól

Niech funkcje f i g będą ciągłe na $\langle a, b\rangle$ i niech $f(x) < g(x)$ dla każdego $x \in (a, b)$. Pole trapezu krzywoliniowego D ograniczonego wykresami funkcji f i g oraz prostymi $x = a$ i $x = b$ wyraża się wzorem:

$$|D| = \int_{a}^{b} (g(x) - f(x))dx$$

Przykład: