Lista zadań z logiki nr 1

1. Metodą 0-1 sprawdzić, które z formuł są tautologiami:

   (a) $\neg(p \Rightarrow \neg p)$,

   (b) $((p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow p) \Rightarrow p$,

   (c) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$,

   (d) $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,

   (e) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$,

   (f) $(p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow \neg p)$,

   (g) $\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q)$,

   (h) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$

   (i) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$,

   (j) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$,

   (k) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$

   (l) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow p)) \Rightarrow p$

   (m) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Leftrightarrow \neg q)$,

   (n) $((p \wedge q) \vee r) \Leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r))$.

   Dodatkowo określić, czy formuły, któte nie są tautologiami są spełnialne, czy też nie.

2. Metodą skróconą udowodnić, że formuły są tautologiami:

   (a) $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg q)$,

   (b) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$,

   (c) $((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (p \vee q)) \Rightarrow r$,

   (d) $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$,

   (e) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$,

   (f) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$,

   (g) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$,

   (h) $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$.

3. Zdefiniować koniunkcję

   (a) za pomocą negacji i alternatywy

   (b) za pomocą negacji i implikacji

(c) *za pomocą spójnika NOR

(d) * za pomocą spójnika NAND

4. Zdefiniować alternatywę

   (a) za pomocą negacji i koniunkcji

   (b) za pomocą negacji i implikacji

   (c) za pomocą implikacji

   (d) * za pomocą spójnika NOR

   (e) * za pomocą spójnika NAND

5. Alternatywę rozłączną definiujemy:

$$p \veebar q \Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$$

   Napisać tabelkę dla tego spójnika.

6. Sprawdzić, czy następujące schematy przedstawiają reguły wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{l}\alpha \Rightarrow \beta \\ \neg\beta\end{array}}{\neg\alpha}, \qquad \frac{\begin{array}{l}\alpha \vee \beta \\ \neg\alpha\end{array}}{\beta}, \qquad \frac{\begin{array}{l}\neg(\alpha \wedge \beta) \\ \alpha\end{array}}{\neg\beta}, \qquad \frac{\begin{array}{l}\alpha \Rightarrow \beta \\ \alpha \Rightarrow \neg\beta\end{array}}{\neg\alpha}$$

$$\frac{(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma}{\alpha \Rightarrow \gamma}, \qquad \frac{(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma}{\alpha \Rightarrow \gamma}, \qquad \frac{\begin{array}{l}\alpha \Rightarrow \beta \\ \beta \Rightarrow \gamma\end{array}}{\alpha \Rightarrow \gamma} \qquad , \frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{(\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \neg\beta)}.$$

7. Zbadaj, które z podanych niżej wnioskowań są dedukcyjne. Napisz odpowiedni schemat.

   (a) Jeżeli nie nakręcę zegarka, to stanie, a jeśli stanie, to nie będę wiedział, która godzina; przeto jeśli nie nakręcę zegarka, to nie będę wiedział, która godzina.

   (b) Nieprawda, że: (sło”nce świeci i jest ciepło), zatem sło”nce nie świeci lub nie jest ciepło.

   (c) Jeśli Jan odzyska zdrowie, będzie musiał wrócić do pracy. Jeśli Jan nie odzyska zdrowia, będzie musiał wrócić do pracy. Więc Jan będzie musiał wrócić do pracy.

   (d) Jeżeli Piotr wie, kim był Arystoteles, to Piotr skądś się o tym dowiedział. Ale nieprawda, że Piotr skądś się o tym dowiedział. Wobec tego nieprawda, że Piotr wie, kim był Arystoteles.

   (e) Jeżeli Jan uczy się pilnie, to otrzymuje dobre stopnie, a jeśli nie otrzymuje dobrych stopni, to traci humor; lecz Jan nie traci humoru; zatem Jan uczy się pilnie.

(f) Jeżeli Jan jest zdolniejszy od Piotra, a Piotr ma lepsze wyniki w nauce, to Jan mógłby uczyć się pilniej; lecz Jan nie Mógłby uczyć się pilniej, a Piotr ma lepsze wyniki w nauce; zatem Jan nie jest zdolniejszy od Piotra.

(g) Jan jest podwładnym Piotra. Jeżeli Jan jest inteligentniejszy od Piotra, a jest jego podwładnym, to Piotr czuje się zagrożony. Lecz Jan nie jest inteligentniejszy od Piotra. Zatem Piort nie czuje się zagrożony.

(h) Jeżeli Jan uczy się logiki, to jeśli jego poglądy są wewnętrznie sprzeczne, to je zmieni. Jeżeli Jan zmieni poglądy, to straci autorytet. Jeśli zatem poglądy Jana są wewnętrznie sprzeczne, lecz Jan nie uczy się logiki, to nie straci autorytetu.

8. Dla formuł z zad.1 (d)-(h) napisać KPN, adla (i)-(m) napisać APN, i na tej podstawie okteślić ich prawdziwość, spełnialność, czy też niespełnialność.

9. Dla formuł w KPN zastosować regułę rezolucji (i skrócić), następnie określić ich spełnialność:

   (a) $p \wedge (\neg p \vee q) \wedge \neg q$,

   (b) $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge r$,

   (c) $(\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg s \vee p)$,

   (d) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (\neg r \vee p)$.

LITERATURA

[1] Huzar Z. Elementy logiki dla informatyków, Oficyna wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2002. Wydawca: Bel Studio.

[2] Murawski R., Świrydowicz K. Podstawy logiki i teorii mnogości, Wydanie: 1, Wydawnictwo Naukowe UAM, 2006.

[3] Słupecki J., Borkowski L. Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości, PWN, Wyd. IV, Warszawa 1984.

[4] Rasiowa H., Wstęp do matematyki współczesnej, PWN, Wyd. VIII, Warszawa 1984.

[5] Wiktor Marek, Janusz Onyszkiewicz, Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, wyd. 12, 2016.