Lista zadań z logiki nr 3

1. Zbadać, które z podanych niżej relacji są: zwrotne, przeciwzwrotne, symetryczne, asymetryczne, antysymetryczne, przechodnie:

   (a) $xRy \iff x < y$, dla $x, y \in \mathbb{R}$,

   (b) $xRy \iff 2|(x + y)$, dla $x, y \in \mathbb{N}$,

   (c) $xRy \iff |x| < |y|$, dla $x, y \in \mathbb{R}$,

   (d) $xRy \iff x + y = 1$, dla $x, y \in \mathbb{R}$,

   (e) $xRy \iff \mathrm{sgn}x \leq \mathrm{sgn}y$, dla $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Zbadać, które z własności wymienionych w zadaniu 1 przysługują relacji S określonej w zbiorze $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ za pomocą tabelki:

S	1	2	3	4	5
1	+	+			+
2	+	+		+	
3			+		
4		+		+	+
5	+			+	+

   (znak + na przecięciu m-tej kolumny i n-tego wiersza oznacza, że para $< m, n >\in S$).

3. W poniższych przykładach udowodnij, że podane relacje są relacjami równoważności (są zwrotne, symetryczne, przechodnie). Opisz ich klasy równoważności:

   (a) $< x_1, y_1 > R < x_2, y_2 > \iff x_1 - y_1 = x_2 - y_2$, dla $< x_1, y_1 >, < x_2, y_2 >\in \mathbb{N}^2$,

   (b) $< x_1, y_1 > R < x_2, y_2 > \iff {x_1}^2 + {y_1}^2 = {x_2}^2 + {y_2}^2$, dla $< x_1, y_1 >, < x_2, y_2 >\in \mathbb{R}^2$,

   (c) $mRn \iff 2|(m - n)$ dla $m, n \in \mathbb{N}$,

   (d) $(a + bi)R(c + di) \iff ac > 0$, dla $a + bi, c + di \in \mathbb{C} \ \wedge \ a, c \neq 0$.

4. W poniższych przykładach udowodnij, że podane relacje są relacjami częściowego porządku (są zwrotne, antysymetryczne, przechodnie).

   (a) $xRy \iff x \leq y$, dla $x, y \in \mathbb{R}$,

   (b) $xRy \iff x|y$, dla $x, y \in \mathbb{N}$,

   (c) $A\,R\,B \iff A \subseteq B$, dla $A, B \in U$, U- uniwersum,

   (d) $< m_1, n_1 > R < m_2, n_2 > \iff m_1 \leq m_2 \wedge n_1 \leq n_2$, dla $< m_1, n_1 >, < m_2, n_2 >\in \mathbb{N}^2$,

5. Niech $f : X \to Y$ i $A_1, A_2 \subseteq X$. Udowodnić, że:

   (a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,

   (b) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$,

   (c) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$,

   Dla jakich funkcji w przykładach (b) i (c) będzie równość?

6. Niech $f : X \to Y$ i $B_1, B_2 \subseteq Y$. Udowodnić, że:

   (a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$,

   (b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,

   (c) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

7. Niech $f : X \to Y$ i $A \subseteq X,\ B \subseteq Y$. Udowodnić, że:

   (a) $f(f^{-1}(B) \subseteq B$,

   (b) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$.

8. Znaleźć wykres funkcji f oraz $f(A)$ i $f^{-1}(B)$:

   (a) $f(x) = \left|\frac{4}{x-3} - 2\right|$, $A = [-1, 0) \cup (2, 3]$, $B = [-3, 3]$,

   (b) $f(x) = \left|\frac{4}{|x|-3} - 2\right|$, $A = [0, 1]$, $B = [2, 3]$,

   (c) $f(x) = \frac{x^4-1}{|x^2-1|}$, $A = [-1, 0] \cup (1, 2)$, $B = [-2, 3)$.