WYKŁAD 1: RACHUNEK ZDAŃ

Początki rachunku zdań sięgają starożytności i wywodzą się ze szkoły stoików (II wiek p.n.e.), której najwybitniejszym przedstawicielem był Chryzyp. Właściwy rozwój rachunku zdań rozpoczął się dopiero w XIX wieku zainicjowany pracami angielskiego matematyka G. Boole'a, którego uważa się za twórcę logiki matematycznej.

Logika matematyczna – nauka, której jednym z zadań jest badanie natury rozumowań stosowanych w matematyce ze szczególnym uwzględnieniem jej dwóch działów:

- rachunku zdań
- rachunku funkcyjnego

Definicja 1. *Zdanie sensowne – zdanie oznajmujące, o którym w ramach danej nauki można powiedzieć, czy jest prawdziwe, czy też fałszywe. Zdania sensowne oznaczamy* $p, q, r, s, p_1, p_2, \ldots$. *Zdanie prawdziwe ma wartoś'c logiczną* **1**, *(symbolicznie* $w(p) = 1$*), zdanie fałszywe ma wartość logiczną* **0**, *(symbolicznie* $w(p) = 0$*).*

Ze zdań sensownych za pomocą funktorów zdaniotwórczych budujemy wyrażenia rachunku zdań. Najczęściej stosowane funktory:

FUNKTOR	SYMBOL	SPOSÓB ODCZYTANIA
negacja	$\neg p$	nie p
koniunkcja	$p \wedge q$	p i q
alternatywa	$p \vee q$	p lub q
implikacja	$p \Rightarrow q$	jeśli p to q
równoważność	$p \Leftrightarrow q$	p wtedy i tylko wtedy gdy q

Przykład zdania złożonego (wyrażenia rachunku zdań): $(p \vee \neg q) \Leftrightarrow [\neg(p \vee q) \Rightarrow (q \wedge r)]$.
Zdania złożone oznaczamy literami greckimi: $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$.
Wartość logiczną funktorów definiujemy za pomocą tabel zero-jedynkowych:

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Definicja 2. *Tautologią (prawem rachunku zdań) nazywamy wyrażenie rachunku zdań, które jest prawdziwe bez względu na to, jakie wartości logiczne spełniają zdania składowe.*

Wyrażenie rachunku zdań jest spełnialne, gdy dla pewnych wartości logicznych zdań składowych jest prawdziwe.

Wyrażenie rachunku zdań nie jest spełnialne (jest kontrtautologią), gdy dla żadnych wartości logicznych zdań składowych nie jest prawdziwe.

Przykłady.

$p \vee \neg p$ - prawo wyłączonego środka

Sprawdzamy prawdziwość wypełniając odpowiednią tabelkę:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
0	1	1
1	0	1

$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ - prawo poprzedzania

Sprawdzamy prawdziwość wypełniając odpowiednią tabelkę:

p	q	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

$\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ - prawo Dunsa Szkota

Tabelka:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	0	1

Zadanie. Sprawdzić, czy następujące wyrażenia są tautologiami:

(a) $\neg(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$.

Tabelka zero-jedynkowa:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1

Odpowiedź: formuła nie jest tautologią, ale jest spełnialna.

(b) $(p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$.

Tabelka zero-jedynkowa:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow \neg q$	$\neg p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1

Odpowiedź: formuła nie jest tautologią, ale jest spełnialna.

Metoda skrócona sprawdzania tautologiczności wyrażeń polega na przeprowadzeniu rozumowania nie wprost. Mianowicie zakładamy, że dana formuła nie jest tautologią, a następnie próbujemy otrzymać sprzeczność. Jeżeli otrzymamy sprzeczność, to wcześniejsze założenie jest obalone, a więc formuła **jest** tautologią. Jeżeli nie otrzymamy sprzeczności, to świadczy to o tym, że istnieje wartościowanie dla którego formuła nie jest prawdziwa.

Zadanie. Metodą skróconą sprawdzić, czy jest tautologią:

(a) $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$.

Wykażemy, że prawami są obie implikacje:

(a1) $\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \neg q)$ i (a2) $(p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q)$.

Dowód (a1).

1. $\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \neg q)$=0 $\{$z.d.n.$\}$
2. $\neg(p \Rightarrow q)$=1 $\{1\}$
3. $(p \wedge \neg q)$=0 $\{1\}$
4. $p \Rightarrow q$=0 $\{2\}$
5. p=1 $\{4\}$
6. q=0 $\{4\}$

7. $\neg q$=1 $\{6\}$

8. $(p \land \neg q)$=1 $\{5,7\}$

sprzeczność: $\{3, 8\}$

Dowód (a2).

1. $(p \land \neg q) \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q)$=0 {z.d.n.}

2. $(p \land \neg q)$=1 $\{1\}$

3. $\neg(p \Rightarrow q)$=0 $\{1\}$

4. p=1 $\{2\}$

5. $\neg q$=1 $\{2\}$

6. q=0 $\{5\}$

7. $(p \Rightarrow q)$=1 $\{3\}$

8. $(p \Rightarrow q)$=0 $\{4,6\}$

sprzeczność: $\{7, 8\}$

Zapis skrócony dla (a1):

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\ \ 1 \\ 1\ \ 1\ 0\ 0\quad 0\ \ 1\ \ 0\ 1\ 0 \\ \neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \land \neg q) \end{array}$$

Zapis skrócony dla (a2):

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\quad 0 \\ 1\ \ 1\ 1\ 0\ \ 0\ \ 0\ 1\ 1\ 0 \\ (p \land \neg q) \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q) \end{array}$$

NAJWAŻNIEJSZE PRAWA RACHUNKU ZDAŃ

1. $p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$ – prawo podwójnej negacji,

2. $p \lor \neg p$ – prawo wyłączonego środka,

3. $\neg(p \land \neg p)$ – prawo sprzeczności,

4. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ – prawo de Morgana,
5. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ – prawo de Morgana,
6. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ – prawo kontrapozycji,
7. $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$ – prawo Pierce'a,
8. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$,
9. $(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$ – prawo Claviusa,
10. $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ – prawo Dunsa Szkota,
11. $(p \wedge q) \Rightarrow p$ – prawo opuszczania koniunkcji,
12. $p \Rightarrow (p \vee q)$ – prawo wprowadzania alternatywy,
13. $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$ – prawo eksportacji i importacji,
14. $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ – prawo łączności koniunkcji,
15. $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ – prawo łączności alternatywy,
16. $[p \wedge (q \vee r] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ – prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy,
17. $[p \vee (q \wedge r] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ – prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji.

Definicja 3. *Reguła wnioskowania:*

$$\frac{\begin{array}{l}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{array}}{\beta}$$

jest poprawna, gdy prawdziwość przesłanek: $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *pociąga prawdziwość wniosku* β*.*

Przykładem poprawnej reguły wnioskowania jest reguła odrywania:

$$\frac{\begin{array}{l}\alpha \Rightarrow \beta\\ \alpha\end{array}}{\beta}$$

Dowód poprawności (dowód wprost):

1. $\alpha \Rightarrow \beta$=1 {zał.}
2. α=1 {zał.}

3. β=1 {1,2}

Inny przykład: reguła przechodności dla implikacji (reguła sylogizmu):

$$\frac{\begin{array}{l}\alpha \Rightarrow \beta \\ \beta \Rightarrow \gamma\end{array}}{\alpha \Rightarrow \gamma}$$

Dowód poprawności (dowód nie wprost):

1. $\alpha \Rightarrow \beta$=1 {zał. d. n.}
2. $\beta \Rightarrow \gamma$=1 {zał. d. n.}
3. $\alpha \Rightarrow \gamma$=0 {zał. d. n.}
4. α=1 {3}
5. γ=0 {3}
6. β=1 {1,4}
7. γ=1 {2, 6}

sprzeczność {5,7}.