WYKŁAD 2: POSTACIE NORMALNE

Definicja 1. *Alternatywa uogólniona:*

$$\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_n = \begin{cases} \varphi_1 & gdy \quad n = 1, \\ \varphi_1 \vee \varphi_2 & gdy \quad n = 2, \\ (\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_{n-1}) \vee \varphi_n & gdy \quad n > 2 \end{cases}$$

Definicja 2. *Koniunkcja uogólniona:*

$$\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n = \begin{cases} \varphi_1 & gdy \quad n = 1, \\ \varphi_1 \wedge \varphi_2 & gdy \quad n = 2, \\ (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_{n-1}) \wedge \varphi_n & gdy \quad n > 2 \end{cases}$$

Literał - zmienna zdaniowa lub jej negacja, np. p, $q \neg p, \neg q$.

Alternatywa elementarna - alternatywa uogólniona złożona z literałów, np.$p \vee q \vee \neg r$, p, $\neg q$, $p \vee \neq q \vee \neg r \vee s$.

Definicja 3. *Wyrażenie rachunku zdań (formuła) φ jest wyrażeniem o koniunkcyjnej postaci normalnej (symb. $\varphi \in KPN$), gdy φ jest uogólnioną koniunkcją, której wszystkie czynniki są alternatywami elementarnymi, np.*

$$p \vee \neg q \vee r \vee s, \qquad (p \vee \neg q) \wedge (r \vee s \vee \neg p) \wedge (p \vee q) \wedge p$$

Twierdzenie 1. *Każde wyrażenie sensowne rachunku zdań zapisane przy pomocy zmiennych zdaniowych $p_1, ..., p_n$ jest równoważne pewnemu wyrażeniu o koniunkcyjnej postaci normalnej, w którym występują zmienne $p_1, ..., p_n$.*

Przykład na znalezienie koniunkcyjnej postaci normalnej dla formuły $\phi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$. Skorzystamy z następujących tautologii w postaci równoważności:

$$\begin{array}{ll} (\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta) & (f1) \\ \neg(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\alpha \wedge \neg\beta) & (f2) \\ \neg(\neg\alpha) \Leftrightarrow \alpha & (f3) \\ (\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow (\beta \vee \alpha) & (f4) \\ \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \Leftrightarrow [(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)] & (f5) \end{array}$$

Wyprowadzenie KPN dla ϕ przedstawimy w punktach. W każdym punkcie są formuły sobie równoważne.

1. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

2. $\neg(p \Rightarrow q) \vee (\neg q \Rightarrow \neg p) \quad \{1, \text{(f1)}\}$

3. $(p \wedge \neg q) \vee (\neg(\neg q) \vee \neg p)$ $\{1, (f2), (f1)\}$

4. $(p \wedge \neg q) \vee (q \vee \neg p)$ $\{3, (f3)\}$

5. $(q \vee \neg p) \vee (p \wedge \neg q)$ $\{4, (f4)\}$

6. $(q \vee \neg p \vee p) \wedge (q \vee \neg p \vee \neg q)$ $\{5, (f5)\}$

Formuła $(q \vee \neg p \vee p) \wedge (q \vee \neg p \vee \neg q)$ jest KPN dla formuły ϕ. Mamy 1. $\Leftrightarrow$ 2. $\Leftrightarrow$ 3. $\Leftrightarrow$ 4. $\Leftrightarrow$ 5. $\Leftrightarrow$ 6.

ZASADY ZASTĘPOWANIA

numer	FORMUŁA ZASTĘPOWANA	FORMUŁA ZASTĘPUJĄCA
$(f1)$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\neg\alpha \vee \beta$
$(f2)$	$\neg(\alpha \Rightarrow \beta)$	$\alpha \wedge \neg\beta$
$(f3)$	$\neg(\neg\alpha)$	α
$(f4)$	$\alpha \vee \beta$	$\beta \vee \alpha$
$(f5)$	$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$	$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
$(f6)$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$	$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$
$(f7)$	$\neg(\alpha \vee \beta)$	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$
$(f8)$	$\alpha \vee \alpha$	α

Inny przykład: Sprowadzić do KPN fprmułę $\psi = (p \vee q) \Rightarrow (s \wedge p)$.

1. $(p \vee q) \Rightarrow (s \wedge p)$.

2. $\neg(p \vee q) \vee (s \wedge p)$ $\{1, (f1)\}$

3. $(\neg p \wedge \neg q) \vee (s \wedge p)$ $\{2, (f7)\}$

4. $(\neg p \vee s) \wedge (\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee s) \wedge (\neg q \vee p)$ $\{3, (f5)\}$

W punkcie 4. mamy KPN dla formuły ψ.

ELIMINACJA ZDAŃ PRAWDZIWYCH I ZDAŃ SPRZECZNYCH

Formuła postaci $p \vee \neg p$ jest zdaniem zawsze prawdziwym (tautologią). Będziemy zastępować ją symbolem $\mathbf{1}$. Formuła postaci $p \wedge \neg p$ jest zdaniem zawsze fałszywym (kontrtautologią). Będziemy zastępować ją symbolem $\mathbf{0}$.

Zasady eliminacji:

$$(\alpha \wedge \mathbf{1}) \Leftrightarrow \alpha, \quad (\alpha \vee \mathbf{1}) \Leftrightarrow \mathbf{1},$$
$$(\alpha \vee \mathbf{0}) \Leftrightarrow \alpha, \quad (\alpha \wedge \mathbf{0}) \Leftrightarrow \mathbf{0},$$

Formuła $\phi = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ jest (jak wiadomo) tautologią. Mając jej KPN fakt ten jest bardzo prosty do udowodnienia:

$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)] \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow [(q \vee \neg p \vee p) \wedge (q \vee \neg p \vee \neg q)] \Leftrightarrow [(q \vee \mathbf{1}) \wedge (\mathbf{1} \vee \neg p)] \Leftrightarrow \mathbf{1} \wedge \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{1}$.

Analogicznie możemy zbadać prawdziwość, czy też spełnialność formuły $\psi = (p \vee q) \Rightarrow (s \wedge p)$. Mamy:

$(p \vee q) \Rightarrow (s \wedge p) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (\neg p \vee s) \wedge (\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee s) \wedge (\neg q \vee p) \Leftrightarrow (\neg p \vee s) \wedge \mathbf{1} \wedge (\neg q \vee s) \wedge (\neg q \vee p) \Leftrightarrow (\neg p \vee s) \wedge (\neg q \vee s) \wedge (\neg q \vee p)$.

Widzimy, że powyższa formuła nie jest tautologią, ale jest spełnialna, np. dla następujących wartości: $q = 1$, $p = 0$.

Analogicznie do KPN definiujemy alternatywną postać normalną APN.

Definicja 4. *$\varphi \in APN$, gdy φ jest uogólnioną alternatywą, której wszystkie składniki są koniunkcjami elementarnymi (koniunkcjami literałów), np.*

$$p \wedge \neg q \wedge r \wedge s, \qquad (p \wedge \neg q) \vee (r \wedge s \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \vee p$$

Przekształcimy otrzymanąpowyżej dla formuły ϕ KPN: $(q \vee \neg p \vee p) \wedge (q \vee \neg p \vee \neg q)$ do równoważnej APN.

Skorzystamy kilkakrotnie z prawa rozdzielności koniunkcji względem alternatywy: $[\alpha \wedge (\beta \vee \gamma] \Leftrightarrow [(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)]$.
W istocie połączymy koniunkcją każdy literał z pierwszej alternatywy z każdym literałem z drugiej alternatywy. Otrzymamy:
$(q \wedge q) \vee (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q)$.

REGUŁA REZOLUCJI (symb. (RR))

$$\frac{\alpha \vee p, \quad \beta \vee \neg p}{\alpha \vee \beta}$$

Przesłanki reguły rezolucji (RR) są alternatywami elementarnymi (nazywamy je też klauzulami), wniosek nazywamy rezolwentą.

UWAGA: Przecinek pomiędzy klauzulami ma sens koniunkcji. W istocie przesłanka jest formułą w **KPN**.

Jeżeli w wyniku zastosowania reguły (RR) otrzymamy zbiór pusty (symb. $\emptyset$) to oznacza to, że przesłanki (klauzule) są niespełnialne.

Reguła (RR) jest szczególną postacią reguły przechodności dla implikacji. Napiszemy (RR) w postaci równoważnej:

$$\frac{\alpha \vee p, \quad \neg p \vee \beta}{\alpha \vee \beta}$$

i w kolejnej postaci równoważnej (zastosujemy równoważność oznaczoną jako (f1))

$$\frac{\neg\alpha \Rightarrow p, \quad p \Rightarrow \beta}{\neg\alpha \Rightarrow \beta}$$

otrzymamy regułę przechodności dla implikacji.

Przykłady:

$$\frac{p, \quad \neg p}{\emptyset}$$

Wniosek: formuła $p \wedge \neg p$ nie jest spełnialna.

$$\frac{\dfrac{p, \quad \neg p \vee q, \quad \neg q}{q, \quad \neg q}}{\emptyset}$$

Wniosek: formuła $p \wedge (\neg p \vee q) \wedge \neg q$ nie jest spełnialna. Reguła (RR) została zastosowana 2 razy.

Rezolwenta nie musi być wyznaczona jednoznacznie, jej postać zależy od tego w jakiej kolejności (do jakich literałów) stosujemy (RR). Przykładem jest formuła:

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee r \vee \neg s).$$

Po zastosowaniu (RR) do literałów $\neg p$ oraz p otrzymamy :

$$\frac{\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s, \quad p \vee \neg q \vee r \vee \neg s}{\neg q \vee \neg r \vee \neg s \vee \neg q \vee r \vee \neg s}$$

Po skróceniu otrzymamy (w powyższej rezolwencie powtarzają się literały $\neg q$ i $\neg s$):

$$\neg q \vee \neg r \vee \neg s \vee r.$$

Możemy również zastosować (RR) do literałów $\neg r$ i r:

$$\frac{\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s, \quad p \vee \neg q \vee r \vee \neg s}{\neg p \vee \neg q \vee \neg s \vee p \vee \neg q \vee \neg s}$$

Po skróceniu otrzymamy (w powyższej rezolwencie powtarzają się literały $\neg q$ i $\neg s$):

$$\neg p \vee \neg q \vee \neg s \vee p.$$