WYKŁAD 5: RACHUNEK KWANTYFIKATORÓW

Formy zdaniowe

Definicja 1. *Niech U - uniwersum. Formą (funkcją) zdaniową $\varphi(x)$ jednej zmiennej nazywamy wyrażenie zawierające zmienną x, które staje się zdaniem po podstawieniu za tę zmienną przedmiotu z uniwersum.*

np. $U = \mathbb{R}$, $\underbrace{x + 2 > 3}_{\varphi(x)}$

Powyższa forma staje się zdaniem prawdziwym, gdy za x podstawimy np. 2, natomiast zdaniem fałszywym, gdzy za x podstawimy np. 1.

$\{x \in U : \varphi(x)\}$ - zbiór przedmiotów z uniwersum, które spełniają formę zdaniową φ.

Mamy $a \in \{x \in U : \varphi(x)\} \iff$ zdanie $\varphi(a)$ jest prawdziwe.

np. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0\} = \{0\}$
$\{x \in \mathbb{Z} : 2x = 3\} = \emptyset$
$\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 4 = 0\} = \{1, 4\}$.

Twierdzenie 1.

1. $\{x \in U : \varphi(x) \wedge \psi(x)\} = \{x \in U : \varphi(x)\} \cap \{x \in U : \psi(x)\}$,
2. $\{x \in U : \varphi(x) \vee \psi(x)\} = \{x \in U : \varphi(x)\} \cup \{x \in U : \psi(x)\}$,
3. $\{x \in U : \neg\varphi(x)\} = \{x \in U : \varphi(x)\}'$.

Ponieważ $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$ *to*

4. $\{x \in U : \varphi(x) \Rightarrow \psi(x)\} = \{x \in U : \varphi(x)\}' \cup \{x \in U : \psi(x)\}$,
5. $\{x \in U : \varphi(x) \Leftrightarrow \psi(x)\} = \{x \in U : \varphi(x) \Rightarrow \psi(x)\} \cap \{x \in U : \psi(x) \Rightarrow \varphi(x)\}$,

Dowód 1. $a \in \{x \in U : \varphi(x) \wedge \psi(x)\} \iff$ zdanie $\varphi(a) \wedge \psi(a)$ jest prawdziwe $\iff$ zdanie $\varphi(a)$ jest prawdziwe i zdanie $\psi(a)$ jest prawdziwe $\iff a \in \{x \in U : \varphi(x)\}$ i $a \in \{x \in U : \psi(x)\} \iff a \in \{x \in U : \varphi(x)\} \cap \{x \in U : \psi(x)\}$.

np. rozpiszmy zbiór spełniający formę zdaniową: $x > 2 \Rightarrow x < -3$.

$\{x \in \mathbb{R} : x > 2 \Rightarrow x < -3\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}' \cup \{x \in \mathbb{R} : x < -3\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < -3\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$.

Kwantyfikatory

$\forall_x \, \varphi(x)$ - dla każdego x zachodzi $\varphi(x)$

$\exists_x \, \varphi(x)$ - istnieje x taki, że $\varphi(x)$.

Zdanie $\forall_{x \in U} \, \varphi(x)$ jest prawdziwe $\iff \{x \in U : \varphi(x)\} = U$.

np.
$\forall_{x\in\mathbb{R}}(x^2 \geq 0)$ - zdanie prawdziwe,
$\forall_{x\in\mathbb{R}}(x^2 > 0)$ - zdanie fałszywe.

Zdanie $\exists_{x\in U}\ \varphi(x)$ jest prawdziwe $\Longleftrightarrow$ $\{x \in U:\ \varphi(x)\} \neq \emptyset$.

np.
$\exists_{x\in\mathbb{Z}}(3x = 12)$ - zdanie prawdziwe,
$\exists_{x\in\mathbb{R}}(x^2 < 0)$ - zdanie fałszywe.

Prawa rachunku kwantyfikatorów

- prawo rozdzielności kwantyfikatora ogólnego względem koniunkcji:

$$\forall_{x\in U}\ (\varphi(x) \wedge \psi(x))\ \Leftrightarrow\ (\forall_{x\in U}\ \varphi(x) \wedge \forall_{x\in U}\ \psi(x)),$$

- prawo rozdzielności kwantyfikatora szczegółowego względem alternatywy:

$$\exists_{x\in U}\ (\varphi(x) \vee \psi(x))\ \Leftrightarrow\ (\exists_{x\in U}\ \varphi(x) \vee \exists_{x\in U}\ \psi(x)),$$

- słabe prawo rozdzielności kwantyfikatora ogólnego względem alternatywy:

$$(\forall_{x\in U}\ \varphi(x) \vee \forall_{x\in U}\ \psi(x))\ \Rightarrow\ \forall_{x\in U}\ (\varphi(x) \vee \psi(x)),$$

- słabe prawo rozdzielności kwantyfikatora szczegółowego względem koniunkcji:

$$\exists_{x\in U}\ (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \Rightarrow \exists_{x\in U}\ \varphi(x) \wedge \exists_{x\in U}\ \psi(x).$$

Dowód wprost

1. $\exists_{x\in U}\ (\varphi(x) \wedge \psi(x))$ - zdanie prawdziwe $\{$zał.$\}$
2. $\{x \in U:\ \varphi(x) \wedge \psi(x)\} \neq \emptyset \quad \{1\}$
3. $a \in \{x \in U:\ \varphi(x) \wedge \psi(x)\} \quad \{2\}$
4. $\varphi(a) \wedge \psi(a)$ - zdanie prawdziwe $\{3\}$
5. $a \in \{x \in U:\ \varphi(x)\} \quad \{4\}$
6. $a \in \{x \in U:\ \psi(x)\} \quad \{4\}$
7. $\exists_{x\in U}\ \varphi(x)$ - zdanie prawdziwe $\{4\}$
8. $\exists_{x\in U}\ \psi(x)$ - zdanie prawdziwe $\{4\}$
9. $\exists_{x\in U}\ \varphi(x) \wedge \exists_{x\in U}\ \psi(x)$ - zdanie prawdziwe $\{4\}$

Przykład na to, że implikacja odwrotna nie jest prawem.

$$\underbrace{[\ \underbrace{\exists_{x\in R}\ x>0}_{zdanieprawdziwe}\ \wedge\ \underbrace{\exists_{x\in R}\ x<0}_{zdanieprawdziwe}\ ]}_{zdanie\ prawdziwe}\Rightarrow\underbrace{\exists_{x\in R}\ (x>0\wedge x<0)}_{zdanie\ faszywe}$$

- prawo rozdzielności kwantyfikatora ogólnego względem implikacji:

$$\forall_{x\in U}\ (\varphi(x)\Rightarrow\psi(x))\ \Longrightarrow\ (\forall_{x\in U}\ \varphi(x)\Rightarrow\forall_{x\in U}\ \psi(x)),$$

Dowód niewprost

1. $\forall_{x\in U}\ (\varphi(x)\Rightarrow\psi(x))$ - zdanie prawdziwe $\{$zał.$\}$
2. $\forall_{x\in U}\ \varphi(x)\Rightarrow\forall_{x\in U}\ \psi(x)$ - zdanie fałszywe $\{$zał. dw. niewprost$\}$
3. $\forall_{x\in U}\ \varphi(x)$ - zdanie prawdziwe $\{2\}$
4. $\forall_{x\in U}\ \psi(x)$ - zdanie fałszywe $\{2\}$
5. $\{x\in U:\psi(x)\}\neq U\quad\{4\}$
6. $\{x\in U:\varphi(x)\}=U\quad\{3\}$
7. $\{x\in U:\varphi(x)\Rightarrow\psi(x)\}=U\quad\{1\}$
8. $\{x\in U:\varphi(x)\}'\cup\{\Rightarrow\psi(x)\}=U\quad\{7\}$
9. $\{x\in U:\varphi(x)\}'=\emptyset\quad\{6\}$
10. $\{x\in U:\psi(x)\}=U\quad\{9{,}8\}$

sprzeczność $\{9{,}10\}$

Przykład na to, że implikacja odwrotna nie jest prawem.

$$\underbrace{[\underbrace{\forall_{x\in R}\ x^2>0}_{zdaniefaszywe}\Rightarrow\underbrace{\forall_{x\in R}\ x>0}_{zdaniefaszywe}]}_{zdanie\ prawdziwe}\Rightarrow\underbrace{\forall_{x\in R}(x^2>0\Rightarrow x>0)}_{zdanie\ faszywe}$$

- prawo rozdzielności kwantyfikatora szczegółowego względem implikacji:

$$\forall_{x\in U}\ (\varphi(x)\Rightarrow\psi(x))\ \Longrightarrow\ (\exists_{x\in U}\ \varphi(x)\Rightarrow\exists_{x\in U}\ \psi(x)),$$

Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów

1. $\neg(\forall_x\ \varphi(x))\ \Leftrightarrow\ \exists_x\ \neg\varphi(x),$
2. $\neg(\exists_x\ \varphi(x))\ \Leftrightarrow\ \forall_x\ \neg\varphi(x),$

Dowód implikacji $\Rightarrow$ z 1 - dowód niewprost.

1. $\neg(\forall_x \ \varphi(x))$ - zdanie prawdziwe $\{$zał.$\}$
2. $\exists_x \ \neg\varphi(x)$ - zdanie fałszywe $\{$z. d. niewprost$\}$
3. $(\forall_x \ \varphi(x))$ - zdanie fałszywe $\{1\}$
4. $\{x \in U : \ \varphi(x)\} \neq U \quad \{3\}$
5. $\{x \in U : \ \neg\varphi(x)\} = \emptyset \quad \{2\}$
6. $\{x \in U : \ \varphi(x)\} = U \quad \{5\}$

sprzeczność: $\{6, 4\}$

Dowód implikacji $\Leftarrow$ z 1 - dowód niewprost.

1. $\exists_x \ \neg\varphi(x)$ - zdanie prawdziwe $\{$zał.$\}$
2. $\neg(\forall_x \ \varphi(x))$ - zdanie fałszywe $\{$z. d. niewprost$\}$
3. $\forall_x \ \varphi(x)$ - zdanie prawdziwe $\{2\}$
4. $\{x \in U : \ \varphi(x)\} = U \quad \{3\}$
5. $\{x \in U : \ \varphi(x)\}' = \emptyset \quad \{4\}$
6. $\{x \in U : \ \neg\varphi(x)\} = \emptyset \quad \{5\}$
7. $\{x \in U : \ \neg\varphi(x)\} \neq \emptyset \quad \{1\}$

sprzeczność: $\{6, 7\}$