

ĆWICZENIA Z ALGEBRY LINIOWEJ I GEOMETRII ANALITYCZNEJ  
Zestaw II: struktury algebraiczne; pierwiastki wielomianów, ułamki proste

1. Uzasadnić, że następujące struktury są grupami:

- (a)  $(Z, \circ)$ , gdzie  $Z$ -zb. l. całk.,  $a \circ b = a + b + 1$ ,
- (b)  $(Q(\sqrt{2}), +)$ , gdzie  $Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}, a, b \in Q\}$ , i  $Q$  - zb. l.wymiernych.
- (c)  $(K, \circ)$ , gdzie  $K = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$  i  $f_0(x) = x$ ,  $f_1(x) = -x$ ,  
 $f_2(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f_3(x) = -\frac{1}{x}, x \neq 0$ . Działanie  $\circ$  jest superpozycją,
- (d)  $(A, \cdot)$ , gdzie  $A$  - zbiór wszystkich zespolonych pierwiastków stopnia  $n$  z liczby 1,  $\cdot$  - mnożenie.

2. Uzasadnić, że są pierścieniami:

- (a) zbiór z zad.1 b) z dodawaniem i mnożeniem,
- (b) zbiór  $R[x]$  wszystkich wielomianów zmiennej  $x$  o współczynnikach rzeczywistych ze względu na dodawanie i mnożenie wielomianów.

Dlaczego struktura z przykładu b) nie jest ciałem?

3. W ciele  $(Z_7, +_7, \cdot_7)$  rozwiązać równania:

$$2x + 3 = 4, \quad x^2 + 3x + 2 = 0, \quad 2x^2 + 4 = x.$$

4. Wskazać, o ile jest to możliwe przykłady takich ciał, w których równanie  $x^2 - x + 1 = 0$  ma:

- (a) dokładnie jedno rozwiązanie,
- (b) dokładnie dwa rozwiązania,
- (c) nie ma rozwiązań.

5. Rozłożyć na czynniki w a) w  $R$ , b) w  $C$  wielomiany rzeczywiste:

$$\begin{aligned} & a) x^6 - 1 \quad b) x^4 - 3x^2 + 2, \quad c) x^4 + 3x^2 + 2, \quad d) x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1, \\ & e) x^3 - 2x^2 + 5x + 8, \quad f) x^4 + 16. \end{aligned}$$

6. Rozłożyć na czynniki wielomiany zespolone:

$$a) z^2 + i \quad b) z^4 + 1, \quad c) z^3 - 3iz^2 - 3z + i.$$

7. Podane funkcje wymierne rozłożyć na sumy wielomianów oraz funkcji wymiernych właściwych:

$$a) \frac{x^5 - 3x^2 + x}{x^3 + 4x^2 + 1} \quad b) \frac{x^5 + 3}{x^5 - 4}, \quad c) \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5}{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}.$$

8. Rozłożyć na ułamki proste w a) w  $R$ , b) w  $C$  funkcje wymierne:

$$\begin{aligned} & a) \frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}, \quad b) \frac{x}{(x^2-1)^2}, \quad c) \frac{x^2}{x^4-1}, \quad d) \frac{1}{x^3+x} \\ & e) \frac{x^3+2x^2+3x+1}{(x^3-1)(x-1)}, \quad f) \frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$