ĆWICZENIA Z ALGEBRY LINIOWEJ I GEOMETRII ANALITYCZNEJ
Zestaw III: macierze, wyznaczniki, macierze odwrotne

1. Dla danych macierzy wyznaczyć $A+B$, $A-C$, $A+B+C$, $A-2B+3C$, A^TB, A^TA, AA^T, B^TC.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 5 & 6 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Dane są macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Sprawdzić, czy $(AB)C = A(BC)$. Czy istnieje macierz BAC?

3. Obliczyć wartość wielomianu $f(X) = 3X^2 - 5X^1 + 2X^0$ dla

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

gdzie $X^0 = E$.

4. Wyznaczyć macierze A, dla których zachodzą równości:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} A = A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Czy w zbiorze macierzy kwadratowych stopnia n prawdziwe są wzory (udowodnić dla $n = 2$ lub wskazać kontrprzykład):

$a)$ $(AB)^2 = A^2B^2$, $\quad b)$ $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, $\quad c)$ $(AB)^T = B^TA^T$,
$d)$ $(A+B)^T = A^T + B^T$, $\quad e)$ $(A+E)^2 = A^2 + 2A + E$,
$f)$ $AA^T = 0 \rightarrow A = 0$.

Wyznaczniki, macierz odwrotne

1. Obliczyć wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & -3 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 13 & 19 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Nie rozwijając wyznaczników wykazć równości:

$$a) \begin{vmatrix} a-b & m-n & r-s \\ b-c & n-p & s-t \\ c-a & p-m & t-r \end{vmatrix} = 0, \qquad b) \begin{vmatrix} a & b+c & m \\ b & c+a & m \\ c & a+b & m \end{vmatrix} = 0.$$

3. Nie rozwijając wyznaczników rozwiązać równanie i nierówność:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1-x & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2+x & 2 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix} = 0, \qquad b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & x & 2 \\ 3 & 3 & x & -1 & 0 \\ x & x & x & x^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} < 0.$$

4. Za pomocą przekształceń elementarnych znaleźć macierz odwrotną do macierzy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Rozwiązać równanie za pomocą macierzy odwrotnej:

$$a)\ X \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

6. W zbiorze macierzy kwadratowych n - tego stopnia rozwiązać układ równań macierzowych:

$$\begin{cases} X - A \cdot Y &= E \\ A^{-1} \cdot X + Y = E \end{cases},$$

gdzie A - macierz nieosobliwa stopnia n. Odp.$X = \frac{1}{2}(A+E)$, $Y = \frac{1}{2}(E - A^{-1})$.