ĆWICZENIA Z ALGEBRY LINIOWEJ I GEOMETRII ANALITYCZNEJ
Zestaw V: Wektory w R^3, prosta i płaszczyzna

1. Dane są trzy wektory komplanarne $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, przy czym $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 4$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$, $e\angle(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{6}$. Obliczyć długość wektora $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ według wzoru $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

2. Zbudować wektory $\vec{a} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Obliczyć długość przekątnych i pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{a}$, $\vec{b}$, a także kąt między tymi wektorami.

3. Wierzchołkami czworościanu są punkty: A(1,-5,4),B(0,3,1),C(-2,-4,3),D(4,4,-2). Obliczyć odległość wierzchołka A od ściany BCD.

4. Przez prostą wyznaczoną przez płaszczyzny $4x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 5y - z + 2 = 0$ poprowadzić płaszczyznę:

   (a) przechodzącą przez początek współrzędnych,

   (b) przechodzącą przez punkt $A(1, 1, 1)$,

   (c) równoległą do osi Oy

   (d) prostopadłą do płaszczyzny $2x - y + 5z - 3 = 0$.

5. Napisać równanie prostej prostopadłej poprowadzonej z punktu$A(2, 3, 1)$ do prostej $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$.

6. Znaleźć punkt symetryczny do punktu $P(4, 3, 10)$ względem prostej $x = 1 + 2t,\ y = 2 + 4t,\ z = 3 + 5t$.

7. Prosta l: $x = y = pz$ jest równoległa do płaszczyzny $\pi : x + y + z = 14$. Znaleźć parametr p.

8. Przez prostą

$$l : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = \ 2 + t \quad t \in R \\ z = \ -3t \end{cases}$$

przeprowadzić płaszczyznę π_2 prostopadłą do płaszczyzny $\pi_1 :\ 3x - 2y + 4z + 6 = 0$.

9. Wykazać, że prosta

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = \ -3t \qquad t \in R \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

jest równoległa do płaszczyzny $\pi :\ -5x + 4y + z = 3$. Znaleźć równanie prostej l_2 symetrycznej do l_1 względem płaszczyzny π.

10. Znaleźć rzut prostopadły prostej:

$$l: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = \quad -3t \qquad t \in R \\ z = \ \ 1 - t \end{cases}$$

na płaszczyznę $\pi: \ 2x + 3y - z - 9 = 0$.