WYKŁAD 2: PODSTAWOWE STRUKTURY ALGEBRAICZNE, PIERWIASTKI WIELOMIANÓW, ROZKŁAD FUNKCJI WYMIERNEJ NA UŁAMKI PROSTE

Definicja 1 *Algebrą abstrakcyjną nazywamy teorię, której przedmiotem są działania na elementach pewnego zbioru, przy czym w tej teorii tej nie mówi się czym są te elementy i na czym polegają działania na nich, a tylko zakłada się pewne ogólne własności tych działań. Założenia te nazywamy aksjomatami algebry abstrakcyjnej.*

Niech A - dowolny zbiór zawierający co najmniej dwa elementy.

Definicja 2 *Działanie $\circ$ nazywamy wewnętrznym w zbiorze A, gdy:*

$$\forall_{a,b\in A}\ a \circ b \in A.$$

Definicja 3 *Działanie $\circ$ nazywamy przemiennym, gdy:*

$$\forall_{a,b\in A}\ a \circ b = b \circ a.$$

np.

Definicja 4 *Działanie $\circ$ nazywamy łącznym, gdy:*

$$\forall_{a,b,c\in A}\ (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

np.

Definicja 5 *Elementem neutralnym działania $\circ$ nazywamy element $e \in A$ majćy tę własność, że:*

$$\forall_{a \in A}\ a \circ e = e \circ a = a.$$

np.

Definicja 6 *Elementem odwrotnym do elementu $a \in A$ względem działania $\circ$ nazywamy element $a^{-1} \in A$ taki, że:*

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e,$$

np.

Definicja 7 *Niepusty zbiór G nazywamy grupą, jeżeli określone w nim działanie $\circ$ jest:*

1. *wewnętrzne czyli:*

$$\forall_{a,b \in G}\ a \circ b \in G,$$

2. *łączne, czyli:*

$$\forall_{a,b,c \in G}\ (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c),$$

3. ma element neutralny, czyli:

$$\exists_{e \in G} \forall_{a \in G} \; a \circ e = e \circ a = a,$$

4. ma element odwrotny:

$$\forall_{a \in G} \exists_{a^{-1} \in G} \; a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e,$$

Definicja 8 *Niepusty zbiór G nazywamy grupą przemienną (abelową), jeżeli jest grupą oraz działanie $\circ$ jest przemienne.*

np.

Definicja 9 *Pierścieniem* $(P, \oplus, \odot)$ *nazywamy niepusty zbiór* P *wyposażony w dwa działania wewnętrzne* $\oplus, \odot$, *przy czym:*

(i) $(P, \oplus)$ *- grupa abelowa,*

(ii) $\odot$ *- łączne,*

(iii) $\odot$ *rozdzielne względem* $\oplus$, *czyli*

$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$.

Jeżeli $\odot$ *jest przemienne, to pierścień nazywamy przemiennym. Jeżeli istnieje w* P *element neutralny względem mnożenia, to* P *nazywamy pierścieniem z jedynką.*

np.

Definicja 10 *Ciałem* $(K, \oplus, \odot)$ *nazywamy co najmniej dwuelementowy pierścień* $(P, \oplus, \odot)$, *w którym* $(K \setminus \{\mathbf{0}\}, \odot)$ *jest grupą, a więc :*

$$\forall_{x \in K \setminus \{\mathbf{0}\}} \exists_{x^{-1} \in K \setminus \{\mathbf{0}\}} \; x^{-1} \odot x = x \odot x^{-1} = \mathbf{1}.$$

Uwaga. W ciele K równanie $a + x = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = -1$. Ananlogicznie, równanie $bx = 1$, $b \neq 0$ ma rozwiązanie $x = 1/b$.

np.

PIERWIASTKI WIELOMIANÓW, ROZKŁAD FUNKCJI WYMIERNEJ NA UŁAMKI PROSTE

Definicja 11 *Niech* $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ *-dany wielomian. Liczbę rzeczywistą (zespoloną)* x_0 *nazywamy pierwiastkiem wielomianu* W*, jeżeli* $W(x_0) = 0$*.*

Theorem 12 *[Bezout]* $W(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow$ *wielomian* W *jest podzielny przez dwumian* $x - x_0$*.*

Theorem 13 *[o pierwiastkach całkowitych wielomianu]*

Niech $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ *będzie wielomianem* n*-tego stopnia o współczynnikach całkowitych i niech* $p \neq 0$ *będzie pierwiastkiem całkowitym wielomianu* W*. Wtedy* p *jest dzielnikiem wyrazu wolnego* a_0*.*

Przykłady:

Theorem 14 *[Twierdzenie zasadnicze algebry]*

Każdy wielomian zespolony stopnia $n > 0$ ma n pierwiastków zespolonych (różnych lub nie - wtedy są to pierwiastki k-krotne).

Theorem 15 *Niech $W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + ... + c_1 z + c_0$ -dany wielomian zespolony ($c_n \in C$).*
Niech wielomian W ma pierwiastki z_j o krotności odpowiednio k_j, dla $1 \leq j \leq m$, i $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$. Wtedy

$$W(z) = c_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \cdot ... \cdot (z - z_m)^{k_m}.$$

Przykłady:

Theorem 16 *Niech W będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Wówczas liczba zespolona z_0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu W wtw, gdy liczba $\overline{z}_0$ jest pierwiastkiem k-krotnym tego wielomianu.*

Przykłady:

Theorem 17 *Niech W będzie wielomianem stopnia $n \in N$ o współczynnikach rzeczywistych. Ponadto niech x_j dla $j = 1, ..., m$ i $m < n - 1$ będą pierwiastkami o krotności k_i. Wtedy istnieją takie liczby $p_1, ..., p_s, q_1, ..., q_s, l_1, ..., l_s$ że:*

$$W(x) = a_n(x - x_1)^{k_1} \cdot ... \cdot (x - x_m)^{k_m}(x^2 + p_1 x + g_1)^{l_1} \cdot ... \cdot (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s}.$$

Definicja 18 *Funkcją wymierną rzeczywistą (zespoloną) nazywamy iloraz dwóch wielomianów rzeczywistych (zespolonych).*

Jeżeli stopień wielomianu w liczniku jest niższy niż wielomianu w mianowniku, to funkcja jest właściwa. W przeciwnym wypadku jest niewłaściwa.

Każdą funcję wymierną niewłaściwą możemy zapisać w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

Przykłady:

Definicja 19 *[Ułamki proste] Zespolonym ułamkiem prostym nazywamy zespoloną funkcję wymierną postaci:*

$$\frac{A}{(z+a)^n}$$

gdzie $A, a \in C$ *oraz* $n \in N$.

Rzeczywistym ułamkiem prostym I rodzaju nazywamy rzeczywistą funkcję wymierną postaci:

$$\frac{A}{(x+a)^n}$$

gdzie $A, a \in R$ *oraz* $n \in N$.

Rzeczywistym ułamkiem prostym II rodzaju nazywamy rzeczywistą funkcję wymierną postaci:

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$$

gdzie $A, B, p, q \in R$ *oraz* $n \in N$ *przy czym* $p^2 - 4q < 0$.

Theorem 20 *[o rozkładzie* **zespolonej** *funkcji wymiernej* **właściwej** *na ułamki proste]*

Niech

$$f(z) = \frac{P(z)}{c_n(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (z-z_m)^{k_m}}.$$

Wtedy funkcja rozłoży się jednoznacznie na:

$$\begin{aligned}
&\frac{A_{11}}{z-z_1} + \frac{A_{12}}{(z-z_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(z-z_1)^{k_1}} + \\
&+\frac{A_{21}}{z-z_2} + \frac{A_{22}}{(z-z_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2k_2}}{(z-z_2)^{k_2}} + \\
&\ldots \\
&+\frac{A_{m1}}{z-z_m} + \frac{A_{m2}}{(z-z_m)^2} + \ldots + \frac{A_{mk_m}}{(z-z_m)^{k_m}}
\end{aligned}$$

Przykłady:

Theorem 21 *[o rozkładzie* **rzeczywistej** *funkcji wymiernej* **właściwej** *na ułamki proste]*

Niech

$$f(x) = \frac{P(x)}{c_n(x-x_1)^{k_1} \cdot ... \cdot (x-x_m)^{k_m}(x^2+p_1x+g_1)^{l_1} \cdot ... \cdot (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}.$$

Wtedy funkcja rozłoży się jednoznacznie na:

$$\begin{aligned}
&\frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + ... + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \\
&+\frac{A_{21}}{x-x_2} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + ... + \frac{A_{2k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \\
&... \\
&+\frac{A_{m1}}{x-x_m} + \frac{A_{m2}}{(x-x_m)^2} + ... + \frac{A_{mk_m}}{(x-x_m)^{k_m}} + \\
&+\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + ... + \frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \\
&+\frac{B_{21}x+C_{21}}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{B_{22}x+C_{22}}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + ... + \frac{B_{2l_2}x+C_{2l_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}} + \\
&... \\
&+\frac{B_{s1}x+C_{s1}}{x^2+p_sx+q_s} + \frac{B_{s2}x+C_{s2}}{(x^2+p_sx+q_s)^2} + ... + \frac{B_{sl_s}x+C_{sl_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}
\end{aligned}$$

Przykłady: