WYKŁAD 4: UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

**Definicja 1.** *Układem $m$ równań liniowych o $n$ niewiadomych $x_1, x_2, ..., x_n$, gdzie $n, m \in$ $\mathbf{N}$ nazywamy układ równań postaci:*

$$(*) \left\{ \begin{array}{rl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &= \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{array} \right. ,$$

*gdzie $a_{ij}, b_j \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$.*

Rozwiązaniem układu $(*)$ nazywamy dowolny ciąg $n$ liczb naturalnych $c_1, c_2, ..., c_n$ spełniający każde z równań układu.

W postaci macierzowej układ $(*)$ zapiszemy następująco:

$$A \cdot X = B, \quad \text{gdzie}$$
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

## Układy $n$ równań liniowych o $n$ niewiadomych

**Definicja 2.** *Układ równań liniowych postaci $A \cdot X = B$, w którym $A$ jest macierzą kwadratową nieosobliwą nazywamy układem Cramera. Rozwiązania są postaci:*

$$x_1 = \frac{W_1}{W}, \quad x_2 = \frac{W_2}{W}, \ ..., x_n = \frac{W_n}{W}, \quad \textit{gdzie}$$

*$W = det\, A$,*

*$W_i$ - wyznacznik macierzy, która powstaje z macierzy $A$ przez zastąpienie jej $i$ - tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.*

Przykład:

## Rodzaje układów równań

Jeżeli układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie (ciąg liczb) to układ nazywamy oznaczonym.

Jeżeli układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań, to nazywamy go nieoznaczonym.

Jeżeli układ równań nie ma rozwiązań, to nazywamy go sprzecznym.

Niech w układzie równań (*) $m = n$ (czyli macierz $A$ jest kwadratowa). Wtedy możliwe są trzy sytuacje:

1. $W \neq 0$ - układ jest układem Cramera (jest oznaczony) i rozwiązania są dane wzorami Jak wyżej.
2. $W = 0$ i $W_i \neq 0$ dla pewnego $i \in \{1, 2, ..., n\}$ - układ jest sprzeczny.
3. $W = 0$ i $W_1 = W_2 = ... = W_n = 0$ - układ jest nieoznaczony

Przykład:

Układy $m$ równań liniowych o $n$ niewiadomych.
Metoda Gaussa

Metoda Gaussa polega na przekształceniu układu $[A|B] \longrightarrow [E|X]$. W tym celu wykonujemy następujące działania na wierszach:

1. zamiana wierszy (ozn. $w_i \leftrightarrow w_j$),
2. mnożenie wiersza przez stałą $\neq 0$ $(c \cdot w_i)$,
3. dodawanie do ustalonego wiersza innego wiersza $(w_i + w_j)$,
4. skreślenie wiersza złożonego z samych zer,
5. skreślenie jednego z wierszy równych lub proporcjonalnych,
6. $^*$ zamiana miejscami dwóch kolumn przy jednoczesnej zamianie niewiadomych $(k_i \leftrightarrow k_j)$

W przypadku $m$ równań z $n$ niewiadomymi, wymienione wyżej działanie na wierszach doprowadzą do następującej macierzy:

$$[A'|B'] = \left[\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & s_{1\,r+1} & \ldots & s_{1n} & z_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & s_{2\,r+1} & \ldots & s_{2n} & z_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & s_{r\,r+1} & \ldots & s_{rn} & z_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & z_{r+1} \end{array}\right],$$

Możliwe są trzy sytuacje:

1. $z_{r+1} \neq 0$ - układ sprzeczny,
2. $z_{r+1} = 0$ i $n = r$ - układ jest układem Cramera i ma dokładnie jedno rozwiązanie,
3. $z_{r+1} = 0$ i $n > r$ - układ ma nieskończenie wiele rozwiązań danych za pomocą $n - r$ parametrów.

Przykłady: