WYKŁAD 5: GEOMETRIA ANALITYCZNA W R^3, PROSTA I PŁASZCZYZNA W PRZESTRZENI R^3

Definicja 1 *Przestrzenią R^3 nazywamy zbiór uporządkowanych trójek (x, y, z), czyli*

$$R^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$$

Przestrzeń R^3 interpretujemy jako zbiór punktów $P(x, y, z)$.

Definicja 2 *Wektorem zaczepionym o początku w punkcie P_1 i końcu P_2 (symb. $\overrightarrow{P_1P_2}$) nazywamy uporządkowaną parę punktów (P_1, P_2). Każdy wektor posiada cztery cechy: długość, kierunek, zwrot i punkt zaczepienia. Długość wektora wyraża się wzorem:*

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Przez wektor swobodny $\overrightarrow{u}$ rozumiemy zbiór wszystkich wektorów (zaczepionych w różnych punktach) które mają ten sam kierunek, zwrot oraz długość co wektor $\overrightarrow{u}$.

Działania na wektorach
Niech $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$; $\overrightarrow{u_1} = (x_1, y_1, z_1)$; $\overrightarrow{u_2} = (x_2, y_2, z_2)$; $\alpha \in \mathbf{R}$
Wtedy

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2);\\
&\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2);\\
&\alpha\overrightarrow{u} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)
\end{aligned}$$

Rysunek

Definicja 3 *Rzutem wektora $\overrightarrow{a}$ na oś s nazywamy wektor $\overrightarrow{a_s}$ o początku i końcu będącymi rzutami na tę oś odpowiednio początku i końca wektora $\overrightarrow{a}$.*

Własności działań:

1. przemienność $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$
2. łączność $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$
3. istnienie elementu neutralnego dodawania $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{o} = \overrightarrow{u}$
4. istnienie elementu przeciwnego względem dodawania $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{-u}) = \overrightarrow{o}$
5. $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
6. $(\alpha\beta)\overrightarrow{u} = \alpha(\beta\overrightarrow{u})$
7. $(\alpha + \beta)\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}$
8. $\alpha(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}$

Definicja 4 *Kombinacją liniową wektorów u_i, $i = 1, 2, ..., n$ nazywamy wektor:*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{u_i} = \lambda_1 \overrightarrow{u_1} + \lambda_2 \overrightarrow{u_2} + ... + \lambda_n \overrightarrow{u_n}$$

Definicja 5 *Wektory u_i, $i = 1, 2, ..., n$ nazywamy liniowo niezależnymi, jeżeli nie istnieje ich nietrywialna kombinacja liniowa równa zeru, czyli*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{o} \Rightarrow \forall_{i=1,\ldots,n} \lambda_i = 0$$

Wektory, które nie są liniowa niezależne, nazywamy liniowo zależnymi.

Definicja 6 *Bazą przestrzeni wektorowej nazywamy każdy maksymalny zbiór wektorów liniowo niezależnych.*

Uwaga. Każdy wektor z danej przestrzeni wektorowej można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów bazowych.

Przykłady:

Definicja 7 *Dwa wektory* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *są współliniowe (równoległe, liniowo zależne), gdy istnieje prosta w której są zawarte.*

Definicja 8 *Trzy wektory* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *i* $\overrightarrow{c}$ *są współpłaszczyznowe (liniowo zależne), gdy istnieje płaszczyzna w której są zawarte.*

Iloczyn skalarny

Definicja 9

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})$$

Jeżeli $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{o}$ i $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{o}$ i $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = 0$, to $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$.
Inne własności:

1. przemienność $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \circ \overrightarrow{a}$
2. rozdz. dodawania wzg. iloczynu skalarnego:
   $\overrightarrow{a} \circ (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{c}$
3. łączność $(\lambda \overrightarrow{a}) \circ \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b})$
4. $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2$

Iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{a} = [a_x, a_y, a_z]$, $\overrightarrow{b} = [b_x, b_y, b_z]$ obliczamy następująco:

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Zadania.

Iloczyn wektorowy

Definicja 10 *Iloczynem wektorowym* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ *wektorów* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *nazywamy wektor o następujących własnościach:*

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \perp \overrightarrow{a}, \qquad (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \perp \overrightarrow{b}$$
$$|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \sin(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})$$

i o zwrocie zgodnym z orientacją przestrzeni.

Własności:

1. nieprzemienność $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} = -(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$
2. rozdz. dodawania wzg. iloczynu wektorowego $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$
3. łączność $(\lambda\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$
4. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{o} \iff \overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$ dla $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{o}$

Iloczyn wektorowy wektorów $\overrightarrow{a} = [a_x, a_y, a_z]$, $\overrightarrow{b} = [b_x, b_y, b_z]$ obliczamy następująco:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Dowód:

Zadanie.

Iloczyn mieszany

Definicja 11 $\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \circ \overrightarrow{c}$

Niech:
$\overrightarrow{a} = [a_x, a_y, a_z]$,
$\overrightarrow{b} = [b_x, b_y, b_z]$,
$\overrightarrow{c} = [c_x, c_y, c_z]$.
Wtedy iloczyn mieszany obliczamy ze wzoru:

$$\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Interpretacja geometryczna:

Zadanie.

PROSTA I PŁASZCZYZNA W PRZESTRZENI R^3

Równanie płaszczyzny

I. Równanie normalne płaszczyzny:

Dane: punkt: $P_0(x_0, y_0, z_0)$ oraz wektor normalny $\overrightarrow{n} = [A, B, C]$ prostopadły do szukanej płaszczyzny.

Rysunek.

Niech $P(x, y, z)$ dowolny punkt leżący na szukanej płaszczyźnie. Wtedy wektory $\overrightarrow{P_0P} = [x - x_0, y - y_0, z - z_0]$ oraz $\overrightarrow{n}$ muszą być prostopadłe. Stąd:

$$[A, B, C] \circ [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = 0.$$

Po rozpisaniu otrzymamy równanie normalne płaszczyzny:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

.

Przykład.

$\otimes$ **II.RównanieogólnepĪaszczyzny** :

Równanie postaci $Ax+By+Cz+D=0$ ($|A|+|B|+|C|>0$) to równanie ogólne płaszczyzny o wektorze normalnym $\overrightarrow{n}=[A,B,C]$ oraz przecinającej oś Oz w punkcie $z=-\frac{D}{C}$, ($C\neq 0$).

II'. Równanie ogólne płaszczyzny wyznaczonej przez dwa nierównoległe wektory i przechodzącej przez punkt $P_0(x_0,y_0,z_0)$:

Niech $\overrightarrow{a}=[a_x,a_y,a_z]$, $\overrightarrow{b}=[b_x,b_y,b_z]$, - ustalone dwa nierównoległe wektory (swobodne), $P_0(x_0,y_0,z_0)$ -dowolny punkt.

Rysunek

Równanie ogólne $Ax+By+Cz+D=0$ płaszczyzny π wyznaczymy z warunku:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0$$

Zadanie.

III. Równanie parametryczne płaszczyzny wyznaczonej przez dwa nierównoległe wektory i przechodzącej przez punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$**:**
Niech $\overrightarrow{a} = [a_x, a_y, a_z]$, $\overrightarrow{b} = [b_x, b_y, b_z]$, - ustalone dwa nierównoległe wektory (swobodne), $P_0(x_0, y_0, z_0)$ -dowolny punkt.

Rysunek

Wtedy wektor $\overrightarrow{P_0P} = [x - x_0, y - y_0, z - z_0]$ jest kombinacją liniową wektorów $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$. Stąd istnieją takie $s, t \in R$, że:

$$\overrightarrow{P_0P} = s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}.$$

Po rozpisaniu otrzymamy:

$$\begin{cases} x = x_0 + sa_x + tb_x \\ y = y_0 + sa_y + tb_y \qquad s, t \in R \\ z = z_0 + sa_z + tb_z \end{cases}$$

Zadanie.

IV. Równanie odcinkowe płaszczyzny

Równanie płaszczyzny odcinającej na osiach Ox, Oy, Oz układu współrzędnych odpowiednio odcinki $a, b, c \neq 0$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Rysunek.

Zadanie.

Równanie prostej w przestrzeni

I. Równanie parametryczne prostej

Niech $\overrightarrow{v} = [v_x, v_y, v_z]$- dowolny wektor (swobodny) w przestrzeni i $P_0(x_0, y_0, z_0)$ - dowolny punkt.

Rysunek.

Równanie parametryczne prostej l przechodzącej przez punkt P_0 i równoległej do wektora $\overrightarrow{v}$:

$$l: \begin{cases} x = v_x t + x_0 \\ y = v_y t + y_0 \\ z = v_z t + z_0 \end{cases} \qquad t \in \mathbf{R}$$

Zadanie.

II. Równanie kierunkowe prostej

Równanie kierunkowe prostej l przechodzącej przez punkt P_0 i równoległej do wektora $\overrightarrow{v}$:

$$l: \quad \frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}.$$

III. Równanie krawędziowe prostej

Równanie prostej l, która jest wspólną częścią dwóch nierównoległych płaszczyzn

$$\pi_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \ \text{ oraz } \ \pi_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

ma postać:

$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Rysunek.

Zadanie.

Wzajemne położenie punktów, prostych i płaszczyzn

Definicja 12 *a) Rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π nazywamy punkt P' tej płaszczyzny spełniający warunek:*

$$\overrightarrow{PP'} \perp \pi \ ,$$

b)Rzutem prostokątnym punktu P na prostą l nazywamy punkt P' tej prostej spełniający warunek:

$$\overrightarrow{PP'} \perp l \ .$$

Rysunek.

Zadanie.

Theorem 13 *[odległość punktu od płaszczyzny] Odległość punktu* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *od płaszczyzny* $\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0$ *wyraża się wzorem:*

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} ,$$

Rysunek.

Zadanie.

Theorem 14 *[odległość pomiędzy dwoma płaszczyznami równoległymi] Odległość pomiędzy dwoma płaszczyznami równoległymi* $\pi_1: \ Ax + By + Cz + D_1 = 0$ *oraz* $\pi_2: \ Ax + By + Cz + D_2 = 0$ *wyraża się wzorem:*

$$\frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} ,$$

Rysunek.

Zadanie.

Theorem 15 *[odległość dwóch prostych skośnych] Jeżeli proste skośne dane są równaniami:*

$$l_1: \quad \frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1} \quad l_2: \quad \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}.$$

to ich odległość wyraża się wzorem:

$$\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\circ\overrightarrow{N}|}{|\overrightarrow{N}|},$$

gdzie $\overrightarrow{N}=[a_1,b_1,c_1]\times[a_2,b_2,c_2], \quad P_1(x_1,y_1,z_1),\ P_2(x_2,y_2,z_2).$

Rysunek.

Dowód.

Zadanie.

Definicja 16 *[kąt nachylenia prostej do płaszczyzny] Kątem nachylenia prostej l do płaszczyzny π nazywamy kąt ostry α między prostą l, a jej rzutem l' na płaszczyznę π.*

Rysunek.

Zadanie.

Definicja 17 *[kąt między prostymi przecinającymi się] Kątem między przecinającymi się prostymi l_1 i l_2 nazywamy jeden z kątów ostrych φ utworzonych przez te proste.*

Rysunek.

Definicja 18 *[kąt między prostymi skośnymi] Kątem między prostymi skośnymi l_1 i l_2 nazywamy jeden z kątów ostrych φ utworzonych przez proste l_1' i l_2' równoległe do prostych l_1 i l_2 oraz przechodzące przez początek układu współrzędnych.*

Rysunek.

WZÓR NA KĄT MIĘDZY PROSTYMI:

$$\varphi = \arccos \frac{|\overrightarrow{k_1} \circ \overrightarrow{k_2}|}{|\overrightarrow{k_1}| \cdot |\overrightarrow{k_2}|}$$

gdzie $\overrightarrow{k_1}$ i $\overrightarrow{k_2}$ to odpowiednio wektory kierunkowe prostych l_1 i l_2.

Zadanie.

Definicja 19 *[kąt między płaszczyznami] Kątem między przecinającyni się płaszczyznami* π_1 *i* π_2 *nazywamy kąt ostry* φ *między prostymi zawartymi w tych płaszczyznach i prostopadłymi do ich wspólnej krawędzi.*

Rysunek.

WZÓR NA KĄT MIĘDZY PŁASZCZYZNAMI:

$$\varphi = \arccos \frac{|\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$$

gdzie $\overrightarrow{n_1}$ i $\overrightarrow{n_2}$ to odpowiednio wektory normalne płaszczyzn π_1 i π_2.

Zadanie.