Studia niestacjonarne I rok: lista 5 - wektory, prosta i płaszczyzna w R^3

1. Zbadać, czy następujące wektory są liniowo niezależne:
   (a) $\vec{a} = [1, 1], \quad \vec{b} = [1, -1];$
   (b) $\vec{a} = [1, 0, 0], \quad \vec{b} = [0, 3, 0], \quad \vec{c} = [0, 1, 1];$
   (c) $\vec{a} = [0, 1, 2], \quad \vec{b} = [0, 1, 3], \quad \vec{c} = [1, 1, 0];$
   (d) $\vec{a} = [1, -1, 2], \quad \vec{b} = [3, 2, 0], \quad \vec{c} = [-1, -4, 4];$
2. Przedstawić dany wektor $\vec{x} = [1, 2]$ w postaci kombinacji liniowej wektorów bazy $\vec{a}$, $\vec{b}$. Wykonać rysunek.
   (a) $\vec{a} = [1, 0], \quad \vec{b} = [0, 1],$
   (b) $\vec{a} = [1, 1], \quad \vec{b} = [0, 1].$
3. Obliczyć kąt między wektorami $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = -3\vec{m} + 2\vec{n}$, jeśli wektory $\vec{m}$, $\vec{n}$ są jednostkowe i $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \frac{\pi}{3}$.
4. Zbudować wektory $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, oraz obliczyć tangens kąta między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

   Wsk. $tg(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$.
5. Zbudować wektory $\vec{a} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Obliczyć długość przekątnych i pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{a}$, $\vec{b}$, a także kąt między tymi wektorami.
6. Wierzchołkami czworościanu są punkty: A(1,-5,4),B(0,3,1),C(-2,-4,3),D(4,4,-2). Obliczyć odległość wierzchołka A od ściany BCD.
7. Przez prostą wyznaczoną przez płaszczyzny $4x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 5y - z + 2 = 0$ poprowadzić płaszczyznę:
   (a) przechodzącą przez początek współrzędnych,
   (b) przechodzącą przez punkt $A(1, 1, 1)$,
   (c) równoległą do osi Oy
   (d) prostopadłą do płaszczyzny $2x - y + 5z - 3 = 0$.
8. Napisać równanie prostej prostopadłej poprowadzonej z punktu$A(2, 3, 1)$ do prostej $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$.

9. Znaleźć punkt symetryczny do punktu $P(4,3,10)$ względem prostej $x = 1+2t,\ y = 2+4t,\ z = 3+5t$.

10. Prosta l: $x = y = pz$ jest równoległa do płaszczyzny $\pi :\ x+y+z = 14$. Znaleźć parametr p.

11. Przez prostą

$$l : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = \ 2+t \quad t \in R \\ z = \ -3t \end{cases}$$

przeprowadzić płaszczyznę π_2 prostopadłą do płaszczyzny $\pi_1 :\ 3x-2y+4z+6 = 0$.

12. Wykazać, że prosta

$$l_1 : \begin{cases} x = 1-2t \\ y = \ -3t \qquad t \in R \\ z = 2+2t \end{cases}$$

jest równoległa do płaszczyzny $\pi :\ -5x+4y+z = 3$. Znaleźć równanie prostej l_2 symetrycznej do l_1 względem płaszczyzny π.

13. Znaleźć rzut prostopadły prostej:

$$l : \begin{cases} x = -2+t \\ y = \ -3t \quad t \in R \\ z = \ 1-t \end{cases}$$

na płaszczyznę $\pi :\ 2x+3y-z-9 = 0$.