WYKŁAD 1: LICZBY ZESPOLONE

Definicja 1 *i jest to tzw. jednostka urojona spełniająca warunek:*

$$i^2 = -1$$

Definicja 2 *Liczby zespolone z (w postaci algebraicznej) określamy następująco:*

$$z = a + bi, \quad \textit{gdzie } a,\, b \in \mathbf{R}.$$

Część rzeczywistą liczby zespolonej z oznacza się $\mathbf{Re}z$, część urojoną $\mathbf{Im}z$. Stąd:

$$\mathbf{Re}z = a, \quad \mathbf{Im}z = b$$

W zbiorze liczb zespolonych (ozn. C) wprowadzamy działania **+**, **-**, $\cdot$ w sposób następujący:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d)$$
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + i(b - d)$$
$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Definicja 3 *Liczbę sprzężoną do liczby $z = a + bi$ oznaczamy symbolem $\overline{z}$ i definiujemy jako:*

$$\overline{z} = a - bi$$

Za pomocą mnożenia przez liczbę sprzężoną definiujemy dzielenie w zbiorze C:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2})$$

Przykłady:

Interpretacja geometryczna liczby zespolonej

Liczbę zespoloną $z = x + yi$ interpretujemy jako punkt o współrzędnych (x, y), leżący na płaszczyźnie zespolonej.

Z rysunku odczytujemy, ze zachodzą następujące związki:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{|z|} \quad (*)$$

Stąd otrzymamy:

$$z = x + yi = |z|(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Definicja 4 *Postać*

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

nazywamy postacią trygonometryczną liczby zespolonej z.

Liczbę φ spełniającą $(*)$ nazywamy argumentem liczby z. Każda liczba $z \neq 0$ ma nieskończenie wiele argumentów, każde dwa z nich różnią się o wielokrotność liczby 2π.

Argument główny jest to argument należący do przedziału $[0, 2\pi)$.

Przykłady:

Mnożenie, dzielenie, potęgowanie i pierwiastkowanie liczb zespolonych

Niech $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.
Mamy:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Dowód:

Analogicznie otrzymamy wzór na dzielenie:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Przykład:

WZÓR MOIVRE'A
Niech $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Wtedy:

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Przykłady:

Definicja 5 *Liczbę w nazywamy pierwiastkiem stopnia n z liczby z, jeżeli*

$$w^n = z \quad (**)$$

i oznaczamy $\sqrt[n]{z}$.

Jeżeli $z = 0$, to $\sqrt[n]{z} = 0$.

Niech $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$. I niech $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ będzie pierwiastkiem stopnia n z liczby z.

Czyli:

$$w = \sqrt[n]{z}$$

Korzystając z postaci trygonometrycznej i równości $(**)$ otrzymamy:

$$|w|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Żeby dwie liczy w postaci trygonometrycznej były równe ich moduły muszą być równe, natomiast argumenty mogą sie różnić o wielokrotność 2π. Stąd z powyższej równości mamy:

$$|w|^n = |z| \implies |w| = \sqrt[n]{|z|}$$
$$n\psi = \varphi + 2k\pi \implies \psi_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

Wśród pierwiastków jest n istotnie różnych dla $k = 0, 1, ..., n-1$.

WZÓR NA PIERWIASTKOWANIE:

$$\sqrt[n]{z}_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

gdzie $k = 0, 1, ..., n-1$.

Przykłady:

Rozwiązywanie równań kwadratowych

Niech $az^2 + bz + c = 0$ dany trójmian kwadratowy, $a, b, c \in R$, $z \in C$. Jeżeli

$$\Delta > 0, \text{to istnieją dwa pierwiastki rzeczywiste}$$
$$\Delta = 0, \text{to istnieje jeden pierwiastek rzeczywisty dwukrotny}$$
$$\Delta < 0, \text{to istnieją dwa pierwiastki zespolone sprzężone postaci :}$$
$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Przykłady: