WYKŁAD 2: MACIERZE I WYZNACZNIKI

Definicja 1. *Macierzą prostokątną o wymiarze $m \times n$ nazywamy funkcję, która każdej parze (i, j) liczb naturalnych ($i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n$) przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę rzeczywistą. Mamy:*

$$[a_{ij}]_{m\times n} : \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\} \to \mathbf{R}.$$

$$[a_{i,j}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dwie macierze $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m'\times n'}$ są równe, gdy mają ten sam wymiar, czyli $m = m'$, $n = n'$ oraz $a_{ij} = b_{ij}$ dla każdego $i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n$.

Sumą macierzy $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ nazywamy macierz $C = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$.

Iloczynem macierzy $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ przez liczbę rzeczywistą λ nazywamy macierz $\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{m\times n}$.

Macierz przeciwną określamy następująco: $-A = (-1)A$.

Przykład:

Iloczynem macierzy $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ przez macierz $B = [b_{ij}]_{p\times n}$ nazywamy macierz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ taką, że:

$$c_{ij} = \Sigma_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$

Mówiąc obrazowo elementy $i-$tego wiersza są wymnażane przez elementy $j-$ tej kolumny.

Przykład:

Własności działań na macierzach ($\lambda \in \mathbf{R}$):

$$
\begin{aligned}
&A + B = B + A \\
&A + (B + C) = (A + B) + C \\
&\lambda_1(\lambda_2 A) = (\lambda_1 \lambda_2) A \\
&\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \\
&\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B) \\
&A(BC) = (AB)C \\
&A(B + C) = AB + AC \\
&AB \neq BA
\end{aligned}
$$

UWAGA:

Definicja 2. *Macierzą transponowaną macierzy* $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ *nazywamy macierz*

$$A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$$

Przykład:

Definicja 3. *Macierzą jednostkową* E *nazywamy macierz kwadratową określoną następująco:*

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Macierz jednostkowa jest elementem neutralnym w zbiorze macierzy kwadratowych z działaniem - mnożenia macierzy przez macierze, czyli:

$$AE = EA = A$$

WYZNACZNIKI MACIERZY

Wyznacznik macierzy (kwadratowych) określamy następująco:

$$det\,[a_{11}] = a_{11}$$

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right. =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Definicja 4. *Minorem* M_{ij} *macierzy* A *nazywamy wyznacznik macierzy powstałej z macierzy* A *przez skreślenie* i*-tego wiersza i* j*-tej kolumny.*

Przykład:

Definicja 5. *Dopełnienie algebraiczne A_{ij} elementu a_{ij} macierzy A określamy następująco:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Definicja 6. *wyznacznika macierzy stopnia n*

$$det\, A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$$

Twierdzenie 1. *Laplace'a*

Wyznacznik macierzy $A = [a_{ij}]$ można rozwijać względem dowolnego wiersza $i = 1, 2, ..., n$, czyli

$$det\, A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

lub względem dowolnej kolumny $j = 1, 2, ..., n$, czyli

$$det\, A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

Przykłady:

Własności wyznaczników:

1. $det\,A = det\,A^T$

2. Jeżeli elementy dowolnego wiersza (kolumny) pomnożymy przez liczbę λ, to wyznacznik tej macierzy zostanie pomnożony przez λ.

   Przykład:

3. Jeżeli w macierzy każdy element pewnego wiersz (kolumny) jest równy 0, to wyznacznik tej macierzy też jest równy 0.

4. Jeżeli do elementów ustalonego wiersza (kolumny) dodamy odpowiednie elementy innego wiersza (kolumny) pomnożone przez dowolną liczbę λ, to wyznacznik się nie zmieni.

   Przykład:

5. Jeżeli elementy ustalonego wiersza (kolumny) macierzy są odpowiednio proporcjonalne do elementów innego wiersza (kolumny), to wyznacznik tej macierzy jest równy 0.

   Przykład:

Definicja 7. *Macierzą dołączoną macierzy kwadratowej $A = [aij]$ nazywamy macierz*

$$A^D = [A_{ji}]$$

Macierz dołączona A^D spełnia równość: $AA^D = A^D A = (det\, A)E$.

Definicja 8. *Macierz A nazywamy nieosobliwą, jeżeli $det\, A \neq 0$.*

Definicja 9. *Macierzą odwrotną macierzy nieosobliwej A nazywamy macierz A^{-1} taką że:*

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

Twierdzenie 2. *Dla dowolnej macierzy nieosobliwej A istnieje dokładnie jedna macierz odwrotna A^{-1} i*

$$A^{-1} = \frac{A^D}{det\, A}$$

Stąd

$$A^{-1} = \frac{1}{det\, A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

Przykład: