WYKŁAD 3: UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

Definicja 1. *Układem m równań liniowych o n niewiadomych* $x_1, x_2, ..., x_n$*, gdzie* $n, m \in \mathbf{N}$ *nazywamy układ równań postaci:*

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &= \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases},$$

gdzie $a_{ij}, b_j \in \mathbf{R}$*,* $i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n.$

Rozwiązaniem układu $(*)$ nazywamy dowolny ciąg n liczb naturalnych $c_1, c_2, ..., c_n$ spełniający każde z równań układu.

W postaci macierzowej układ $(*)$ zapiszemy następująco:

$$A \cdot X = B, \quad \text{gdzie}$$
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

Definicja 2. *Układ równań liniowych postaci* $A \cdot X = B$*, w którym A jest macierzą kwadratową nieosobliwą nazywamy układem Cramera. Rozwiązania są postaci:*

$$x_1 = \frac{W_1}{W}, \quad x_2 = \frac{W_2}{W}, \ ..., x_n = \frac{W_n}{W}, \quad gdzie$$

$W = det\,A$,

W_i *- wyznacznik macierzy, która powstaje z macierzy A przez zastąpienie jej i - tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.*

Przykład:

Metoda Gaussa polega na przekształceniu układu $[A|B] \longrightarrow [E|X]$. W tym celu wykonujemy następujące działania na wierszach:

1. zamiana wierszy (ozn. $w_i \leftrightarrow w_j$),
2. mnożenie wiersza przez stałą $\neq 0$ $(c \cdot w_i)$,
3. dodawanie do ustalonego wiersza innego wiersza $(w_i + w_j)$,
4. skreślenie wiersza złożonego z samych zer,
5. skreślenie jednego z wierszy równych lub proporcjonalnych,
6. * zamiana miejscami dwóch kolumn przy jednoczesnej zamianie niewiadomych $(k_i \leftrightarrow k_j)$

W przypadku m równań z n niewiadomymi, wymienione wyżej działanie na wierszach doprowadzą do następującej macierzy:

$$[A'|B'] = \left[\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_{1\,r+1} & \dots & s_{1n} & z_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_{2\,r+1} & \dots & s_{2n} & z_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_{r\,r+1} & \dots & s_{rn} & z_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & z_{r+1} \end{array}\right],$$

Możliwe są trzy sytuacje:

1. $z_{r+1} \neq 0$ - układ sprzeczny,
2. $z_{r+1} = 0$ i $n = r$ - układ jest układem Cramera i ma dokładnie jedno rozwiązanie,
3. $z_{r+1} = 0$ i $n > r$ - układ ma nieskończenie wiele rozwiązań danych za pomocą $n - r$ parametrów.

Przykłady: