WYKŁAD 4: GEOMETRIA ANALITYCZNA W R^3

Definicja 1 *Przestrzenią R^3 nazywamy zbiór uporządkowanych trójek (x, y, z), czyli*

$$R^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$$

Przestrzeń R^3 interpretujemy jako zbiór punktów $P(x, y, z)$.

Definicja 2 *Wektorem zaczepionym o początku w punkcie P_1 i końcu P_2 (symb. $\overrightarrow{P_1P_2}$) nazywamy uporządkowaną parę punktów (P_1, P_2). Każdy wektor posiada cztery cechy: długość, kierunek, zwrot i punkt zaczepienia. Długość wektora wyraża się wzorem:*

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Przez wektor swobodny $\overrightarrow{u}$ rozumiemy zbiór wszystkich wektorów (zaczepionych w różnych punktach) które mają ten sam kierunek, zwrot oraz długość co wektor $\overrightarrow{u}$.

Działania na wektorach
Niech $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$; $\overrightarrow{u_1} = (x_1, y_1, z_1)$; $\overrightarrow{u_2} = (x_2, y_2, z_2)$; $\alpha \in \mathbf{R}$
Wtedy

$$\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2);$$
$$\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2);$$
$$\alpha\overrightarrow{u} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

Rysunek

Definicja 3 *Rzutem wektora* $\overrightarrow{a}$ *na oś* s *nazywamy wektor* $\overrightarrow{a_s}$ *o początku i końcu będącymi rzutami na tę oś odpowiednio początku i końca wektora* $\overrightarrow{a}$.

Własności działań:

1. przemienność $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$
2. łączność $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$
3. istnienie elementu neutralnego dodawania $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{o} = \overrightarrow{u}$
4. istnienie elementu przeciwnego względem dodawania $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{-u}) = \overrightarrow{o}$
5. $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
6. $(\alpha\beta)\overrightarrow{u} = \alpha(\beta\overrightarrow{u})$
7. $(\alpha + \beta)\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}$
8. $\alpha(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}$

Definicja 4 *Kombinacją liniową wektorów u_i, $i = 1, 2, ..., n$ nazywamy wektor:*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{u_i} = \lambda_1 \overrightarrow{u_1} + \lambda_2 \overrightarrow{u_2} + ... + \lambda_n \overrightarrow{u_n}$$

Definicja 5 *Wektory u_i, $i = 1, 2, ..., n$ nazywamy liniowo niezależnymi, jeżeli nie istnieje ich nietrywialna kombinacja liniowa równa zeru, czyli*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{o} \Rightarrow \forall_{i=1,\ldots,n} \lambda_i = 0$$

Wektory, które nie są liniowa niezależne, nazywamy liniowo zależnymi.

Definicja 6 *Bazą przestrzeni wektorowej nazywamy każdy maksymalny zbiór wektorów liniowo niezależnych.*

Uwaga. Każdy wektor z danej przestrzeni wektorowej można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów bazowych.

Przykłady:

Definicja 7 *Dwa wektory* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *są współliniowe (równoległe, liniowo zależne), gdy istnieje prosta w której są zawarte.*

Definicja 8 *Trzy wektory* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *i* $\overrightarrow{c}$ *są współpłaszczyznowe (liniowo zależne), gdy istnieje płaszczyzna w której są zawarte.*

Iloczyn skalarny

Definicja 9

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})$$

Jeżeli $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{o}$ i $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{o}$ i $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = 0$, to $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$.
Inne własności:

1. przemienność $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \circ \overrightarrow{a}$

2. rozdz. dodawania wzg. iloczynu skalarnego:
   $\overrightarrow{a} \circ (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{c}$

3. łączność $(\lambda \overrightarrow{a}) \circ \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b})$

4. $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2$

Iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{a} = [a_x, a_y, a_z]$, $\overrightarrow{b} = [b_x, b_y, b_z]$ obliczamy następująco:

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Zadania.

Iloczyn wektorowy

Definicja 10 *Iloczynem wektorowym* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ *wektorów* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *nazywamy wektor o następujących własnościach:*

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \perp \overrightarrow{a}, \qquad (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \perp \overrightarrow{b}$$
$$|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \sin (\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})$$

i o zwrocie zgodnym z orientacją przestrzeni.

Własności:

1. nieprzemienność $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} = -(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$
2. rozdz. dodawania wzg. iloczynu wektorowego $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$
3. łączność $(\lambda \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$
4. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{o} \iff \overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b} \quad$ dla $\quad \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{o}$

Iloczyn wektorowy wektorów $\overrightarrow{a} = [a_x, a_y, a_z]$, $\overrightarrow{b} = [b_x, b_y, b_z]$ obliczamy następująco:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Dowód:

Zadanie.

Iloczyn mieszany

Definicja 11 $\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \circ \overrightarrow{c}$

Niech:
$\overrightarrow{a} = [a_x, a_y, a_z]$,
$\overrightarrow{b} = [b_x, b_y, b_z]$,
$\overrightarrow{c} = [c_x, c_y, c_z]$.
Wtedy iloczyn mieszany obliczamy ze wzoru:

$$\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Interpretacja geometryczna:

Zadanie.

Równanie płaszczyzny

I sposób

Niech $\overrightarrow{a} = [a_x, a_y, a_z]$, $\overrightarrow{b} = [b_x, b_y, b_z]$, - ustalone dwa wektory (swobodne), $P_0(x_0, y_0, z_0)$ -dowolny punkt.

Równanie ogólne $Ax + By + Cz + D = 0$ płaszczyzny π wyznaczymy z warunku:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$

II sposób"

Zadanie.

Równanie prostej w przestrzeni

Niech $\overrightarrow{v} = [v_x, v_y, v_z]$- dowolny wektor (swobodny) w przestrzeni i $P_0(x_0, y_0, z_0)$ - dowolny punkt.

Równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt P_0 i równoległej do wektora $\overrightarrow{v}$:

$$\begin{cases} x = v_x t + x_0 \\ y = v_y t + y_0 \\ z = v_z t + z_0 \end{cases} \qquad t \in \mathbf{R}$$