

I INFORMATYKA, LISTA 1 - repetytorium

1. Rozwiązać równania i nierówności:

$$\begin{aligned}
 & a) 3x^3 - 14x^2 + 10x - 8 < 0, \quad b) -x^3 + 4x^2 + 4x + 5 > 0, \\
 & c) x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 12x + 9 = 0, \quad d) \left(\frac{3}{4}\right)^{x+5} > \left(\frac{4}{3}\right)^{x+1}, \quad e) 25^x - 5^{x+1} + 5 = 5^x, \\
 & f) \log_2(2x - 5) < -4, \quad g) \log_{\frac{1}{2}}(5 + 4x - x^2) \geq -3, \quad h) \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned}$$

2. Wyznaczyć dziedzinę funkcji

$$\begin{aligned}
 & a) f(x) = \log_2(1 - 2 \cos x); \quad b) g(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x - 3) - 2}; \quad c) h(x) = \log(\sqrt{3} - \operatorname{tg} x); \\
 & d) p(x) = \log_2[1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6)]; \quad e) k(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}}; \quad f) m(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{tg} x}.
 \end{aligned}$$

3. Zbadać parzystość funkcji

$$\begin{aligned}
 & a) f(x) = x^3 + 5; \quad b) g(x) = 2x^2 \cos x; \quad c) h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}; \\
 & d) i(x) = 2^x + 2^{-x}; \quad e) j(x) = |\sin x|; \quad f) k(x) = \frac{\sin x}{x^3}; \quad f) l(x) = \frac{x}{\arcsin x}.
 \end{aligned}$$

4. Z jakich funkcji elementarnych złożone są następujące funkcje:

$$\begin{aligned}
 & a) y = \sin^3 x; \quad b) y = \sqrt[3]{(1 + x)^2}; \quad c) y = \log \operatorname{tg} x; \\
 & d) y = \sin^3(2x + 1); \quad e) y = 5^{(3x+2)^2}; \quad f) y = \sqrt[3]{\log_2(x + 1) - 2}.
 \end{aligned}$$

5. Wyznaczyć $f(A)$, jeśli

$$\begin{aligned}
 & a) f(x) = \log_2(x + 1), \quad A = (0, 3); \\
 & b) g(x) = \log_2(\sin x), \quad A = \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

6. Niech $h : \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Wyznaczyć $h(C)$, gdzie $C = (0, 1)$.

7. Znaleźć funkcje odwrotne do podanych

$$\begin{aligned}
 & f(x) = 2 - e^{x+1}, \quad g(x) = \frac{3x - 1}{x + 5}, \quad h(x) = x^2 - 2x + 2, \\
 & i(x) = \arcsin(x + 1) - 2, \quad j(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}, \quad k(x) = \log_2 x + 1
 \end{aligned}$$

Uwaga: dziedzinę rozważanej funkcji dobrać tak, aby funkcja odwrotna istniała.

8. Obliczyć

$$a) \arcsin\left(\frac{-1}{2}\right); \quad b) \arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right); \quad c) \arccos\left(\frac{-1}{2}\right); \quad d) \operatorname{arctg}(-\sqrt{3});$$

9. Oblicz wartość wyrażenia:

$$a) \arcsin(-x) + \operatorname{arctg} 2x + \arccos x, \text{ jeżeli } \arccos x = \frac{2\pi}{3},$$
$$b) 2 \arccos x + \arcsin 2x - \operatorname{arctg} 2x, \text{ jeżeli } \arcsin x = \frac{-\pi}{6}.$$

10. Sporządzić wykresy funkcji

$$a) p(x) = \frac{x-1}{x+1}; \quad b) p(x) = \log_2(x-2) - 3; \quad c) q(x) = |\log_{\frac{1}{2}} x|;$$

$$d) f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x < 0 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{dla } 0 \leq x < 2 \\ \log_{\frac{1}{2}} x & \text{dla } x \geq 2 \end{cases};$$

$$e) k(x) = |2^{x+2} - 3|; \quad f) f(x) = (\log_2 x); \quad g) h(x) = (\cos x)$$

$$h) p(x) = 1 - \sin 2x; \quad i) s(x) = |\log_2 x|; \quad j) k(x) = 2^{|x|};$$

$$k) q(x) = 2 \sin x |\cos x|; \quad l) s(x) = \min\left\{x, \frac{1}{x}\right\}; \quad m) t(x) = x - [x]$$

11. Zbadać, czy funkcje są równe, gdy:

$$a) f(x) = \sqrt{x^2}, \quad g(x) = |x|;$$

$$b) f(x) = \frac{1-x^2}{1-x}, \quad g(x) = x+1;$$

$$c) f(x) = \log(x^2 - 4), \quad g(x) = \log(x+2) + \log(x-2)$$

$$d) f(x) = \ln x^2, \quad g(x) = 2 \ln x$$

12. Uzasadnij prawdziwość wzorów:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \sinh^2 x + \cosh^2 x = \cosh 2x, \quad 2 \sinh x \cosh x = \sinh 2x.$$

Literatura

1. M.Gewert, Zb.Skoczylas: Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory. Matematyka dla studentów Politechniki Wrocławskiej.
2. M.Gewert, Zb.Skoczylas: Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania. Matematyka dla studentów Politechniki Wrocławskiej.
3. W. Żakowski: Matematyka, cz. I.
4. Wł. Kryszicki, L. Włodarski: Analiza matematyczna w zadaniach. Tom 1.
5. R. Leitner: Zarys matematyki wyższej, cz. 1.
6. Wł. Stankiewicz: Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych, cz.1.