I INFORMATYKA, LISTA 2: ciągi liczbowe, granice funkcji, asymptoty wykresów funkcji

1. Zbadać monotoniczność ciągów:

$$a_n = \frac{3n}{2n-1}, \qquad b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad c_n = \cos(n\pi), \qquad d_n = \frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$$

2. Korzystając z definicji granicy ciągu uzasadnić podane równości:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3-n}{n+5} = -1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n+5} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \log_2(n+3) = \infty.$$

3. Wykazać, że odpowiednie granice nie istnieją (wybrać odpowiednie podciągi):

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \left(n + (-1)^n n^2\right), \qquad b)\ \lim_{n\to\infty} \sin\frac{n\pi}{3}, \qquad c)\ \lim_{n\to\infty} (-3)^n$$

4. Obliczyć granice ciągów:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-3n}{5-2n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{2+5n}, \qquad \lim_{n\to\infty} (5+n^2-3n^3), \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{5-\sqrt{n}},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+(-1)^n}{2^n+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} [\sqrt{n^2+n}-n], \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}+3^n}{2^n+3^{n+2}},$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{3n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+5}{n}\right)^{3-n},$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+4}{n+3}\right)^{n-5}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+...+\frac{n-1}{n}\right], \qquad \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}\right].$$

5. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granice:

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2 n+4n}{3n-2}, \qquad b)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+6^n+10^n},$$

$$c)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}+\frac{1}{\sqrt{2+n^2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}\right).$$

6. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym obliczyć granice:

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad b)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{10^n}, \qquad c)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

7. Wykazać, że odpowiednie granice nie istnieją (wybrać odpowiednie ciągi argumentów):

$$a)\ \lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}, \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}.$$

8. Obliczyć granice funkcji (jeśli istnieją):

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x),\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{3^x-5^x}{2^x+5^x},\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{2-5x-10x^2}{3x+15},\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{1+x^2},$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4x+1}{2x+1},\qquad \lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1},\qquad \lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3},\qquad \lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-4x+3}{2x-6},\qquad \lim_{x\to-2}\frac{3x+6}{x^3+8},\qquad \lim_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6},\qquad \lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right),$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x},\qquad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2+\sin x}{x^2},\qquad \lim_{x\to\infty}2^{-x}(2+\cos x),$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt[3]{x^2+3x+4}}{x-1},\qquad \lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2},\qquad \lim_{x\to\infty}x-\sqrt{x^2+5x},\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x\operatorname{tg}x-\frac{\pi}{\cos x}),$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3},\qquad \lim_{x\to2}\frac{1}{(x-2)^2},\qquad \lim_{x\to0}2^{\frac{1}{x}},\qquad \lim_{x\to1}e^{\frac{1}{x-1}},\qquad \lim_{x\to1}e^{\frac{1}{(x-1)^2}}.$$

9. Zbadać ciągłość funkcji i naszkicować jej wykres:

$$a)\ f(x)=\begin{cases} x & \text{dla}\quad x\le 0,\\ \frac{x}{x-1} & \text{dla}\quad 0<x<1,\\ \frac{1}{x} & \text{dla}\quad x\ge 1,\end{cases},\qquad b)\ f(x)=\begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} & \text{dla}\quad x<0,\\ x & \text{dla}\quad x\ge 0,\end{cases},$$

$$c)\ f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & \text{dla}\quad x\ne 0,\\ 1 & \text{dla}\quad x=0,\end{cases},\qquad d)\ f(x)=\begin{cases} 2 & \text{dla}\quad x=0 \text{ lub } x=\pm2,\\ 4-x^2 & \text{dla}\quad 0<|x|<2,\\ 4 & \text{dla}\quad |x|>2.\end{cases},$$

$$e)\ f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{dla}\quad x<0\\ \sin x & \text{dla}\quad x\ge 0\end{cases}\qquad f)\ f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{dla}\quad x\le -1\\ \arcsin x & \text{dla}\quad x\in(-1,1]\\ \frac{\pi}{2}x & \text{dla}\quad x>1\end{cases}$$

10. Dobrać parametr $a\in R$ tak, aby podane funkcje były ciągłe:

$$a)\ f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{dla}\quad x\ne 1,\\ a & \text{dla}\quad x=1,\end{cases},\qquad b)\ g(x)=\begin{cases} 5^{1-x} & \text{dla}\quad x\le 0,\\ a & \text{dla}\quad x>0,\end{cases},$$

$$c)\ h(x)=\begin{cases} \frac{x^2-1}{x^3-1} & \text{dla}\quad x\ne 1,\\ a & \text{dla}\quad x=1,\end{cases},\qquad d)\ k(x)=\begin{cases} x-a & \text{dla}\quad x<10,\\ \log x & \text{dla}\quad x\ge 10.\end{cases},$$

$$e)\ f(x)=\begin{cases} \frac{\sin 3x}{4x} & \text{dla}\quad x\ne 0\\ a & \text{dla}\quad x=0\end{cases}$$

11. Wyznaczyć asymptoty ukośne oraz pionowe (jeśli istnieją) następujących funkcji:

$$a)\ f(x)=\frac{x}{1-x}\quad b)\ f(x)=\frac{x^3+8}{x^2-4}\quad c)\ f(x)=\frac{x^3}{x-1},\quad d)\ f(x)=\frac{2-x}{x^2-3},\quad e)\ f(x)=\frac{x^3}{3-x^2}$$

$$f)\ f(x)=\frac{x^2-x}{x-3},\quad g)\ f(x)=x\sqrt{\frac{x}{2-x}},\quad h)\ f(x)=x\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}.$$