I INFORMATYKA, LISTA 3 -pochodne funkcji

1. Zbadaj różniczkowalność funkcji:
   (a) $f(x) = e^{-|x+1|}$,
   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$,
   (c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$

2. Oblicz pochodne funkcji:

$$f(x) = (x^2 + 3x - 6)(x^2 - 5x + 1), \qquad f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{5x + 4}, \qquad f(x) = \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}},$$
$$f(x) = \frac{3}{(1 - x^2)(1 - x^3)}, \qquad f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}, \qquad f(x) = x^2 \mathrm{tg} x + \frac{1}{\cos x},$$
$$f(x) = \sin(\sin x), \qquad f(x) = \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}, \qquad f(x) = \cos \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}},$$
$$f(x) = \sin^2 \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right), \qquad f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad f(x) = \arccos \frac{2x - 1}{\sqrt{3}},$$
$$f(x) = \arcsin \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}, \qquad f(x) = \frac{e^{2x}}{\sin x}, \qquad f(x) = \frac{1 + e^x}{1 - e^{5x}}.$$

3. Napisać równania stycznych i normalnych do wykresów wskazanych funkcji we wskazanych punktach. Wykonać rysunek.

$$a)\ f(x) = 4 - x^2, \quad (-1, f(-1)); \quad b)\ f(x) = \ln 2x, \quad \left(\frac{1}{2}, f(1)\right).$$

$$c)\ f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad (-1, f(-1)); \quad d)\ f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} + e^{-x}, \quad (1, 2 + e^{-1}).$$

4. Wykazać, że $\forall_{x>1} \quad \ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$.

   Wsk. Zbadać monotoniczność funkcji $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$.

5. Wykazać, że $\forall_{a,b \in R} \, (0 < b \leq a \quad \Rightarrow \quad \frac{a-b}{a} \leq \ln \frac{a}{b} \leq \frac{a-b}{b})$.

   Wsk. Skorzystać z twierdzenia Lagrange'a dla funkcji $f(x) = \ln x$.

6. Napisać wzór Taylora dla funkcji:

$$y = \ln x, \ \ x_0 = 1, \ \ n = 4; \qquad y = \sqrt[3]{x}, \ \ x_0 = -1, \ \ n = 4; \qquad y = \mathrm{tg} x, \ \ x_0 = \frac{\pi}{4}, \ \ n = 3.$$

7. Napisać wzór Maclaurina n-tego rzędu dla funkcji:

   (a) $y = e^x$,

   (b) $y = \sin x$, (wsk. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$),

   (c) $y = \cosh x$,

   (d) $y = \ln(1 + x)$, (wsk. $(\ln(1 + x))^{(n)} = (-1)^{n-1}(n - 1)!\frac{1}{(1+x)^n}$).

8. Uporządkować wielomian $y = 3x^5+2x^4-6x+6$ według kolejnych potęg dwumianu $x + 2$.

9. Obliczyć z dokładnością do 0,001:

$$\sin 1, \qquad \sqrt{e}, \qquad \ln 1,05, \qquad \sin 27^0.$$

10. Stosując regułę de l'Hospitala obliczyć granice funkcji:

$$1)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x}, \quad 2)\ \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}, \quad 3)\ \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{e^x + e^{-x} - 2}, \quad 4)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}3x},$$

$$5)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}, \quad 6)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\arcsin 2x}, \quad 7)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1 + 2\ln\sin x}, \quad 8)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^3},$$

$$9)\ \lim_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1), \quad 10)\ \lim_{x\to\pi} (\pi - x)\mathrm{tg}\frac{x}{2}, \quad 11)\ \lim_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}, \quad 12)\ \lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\ln x}\right),$$

$$13)^*\ \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\mathrm{tg}x}, \quad 14)^*\ \lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}, \quad 15)^*\ \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{6}{1+2\ln x}}.$$

11. Zbadać przebieg zmienności funkcji:

$$1)\ f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}, \quad 2)\ f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1}, \quad 3)\ f(x) = \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}},$$

$$4)\ f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1}, \quad 5)\ f(x) = x^3 e^{-x}, \quad 6)\ f(x) = x - \ln(x + 1),$$

$$7)\ f(x) = x\sqrt{1 - x^2}, \quad 8)\ f(x) = xe^{-\frac{1}{x}} \quad 9)\ f(x) = \ln\cos x,$$

$$10)\ f(x) = (x + 1)\sqrt[3]{x - 1}, \quad 11)\ f(x) = \frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x - 7}.$$

12. Spośród wszystkich prostokątów, które można wpisać w trójkąt równoboczny a boku **a** wybrać ten, który ma największe pole.

13. Liczbę 36 rozłożyć na dwa czynniki tak, aby suma ich kwadratów była najmniejsza.

14. Wyznaczyć wartość największą i najmniejszą funkcji:

   (a) $f(x) = x + 2\sqrt{x}, \quad x \in \langle 0, 4\rangle$,

   (b) $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}} \quad x \in \langle 1, 2\rangle$

   (c) $f(x) = x^2 e^{-x}, \quad x \in \langle -5, 5\rangle$.