I Rok INFORMATYKI: wykład 1

Ciągi liczbowe, granica ciągu

Definicja 1. *Ciąg liczbowy jest to funkcja, która każdej liczbie naturalnej n przyporządkowuje pewną liczbę rzeczywistą.*

$$\begin{aligned} &1 \to a_1 \\ &2 \to a_2 \\ &\vdots \\ &n \to a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

czyli $(a_n): \ \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Oznaczenia:

$$\begin{aligned} &a_n - \ \text{n-ty wyraz ciągu} \\ &(a_n) - \ \text{ciąg} \\ &\{a_n\} - \ \text{zbiór wyrazów ciągu } (a_n) \end{aligned}$$

Np.

Definicja 2. *Ciąg* (a_n) *jest*
a) ograniczony z góry wtw, gdy $\exists_{M\in\mathbf{R}} \forall_{n\in\mathbf{N}} \ a_n \leq M$
b) ograniczony z dołu wtw, gdy $\exists_{m\in\mathbf{R}} \forall_{n\in\mathbf{N}} \ m \leq a_n$
c) ograniczony wtw, gdy jest ograniczony z dołu i z góry.

Przykład:

Definicja 3. *Ciąg* (a_n) *jest:*
a) rosnący wtw, gdy $\forall_{n\in\mathbf{N}} \ a_n < a_{n+1}$
b) malejący wtw, gdy $\forall_{n\in\mathbf{N}} \ a_n > a_{n+1}$

Zadanie.

Definicja 4. *Ciąg* (a_n) *jest zbieżny do granicy właściwej* a *wtw, gdy wraz ze wzrostem wskaźnika* n *wyrazy* (a_n) *różnią się coraz mniej od* a.
Symbolicznie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall_{\epsilon>0}\, \exists_{n_0\in\mathbf{N}}\, \forall_{n\in\mathbf{N}}\, (n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon)$$

Przykład:

Twierdzenie 5. *Jeżeli ciągi* (a_n) *i* (b_n) *są zbieżne, to:*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) &= \lim_{n\to\infty}(a_n) \pm \lim_{n\to\infty}(b_n) \\
\lim_{n\to\infty}(c \cdot b_n) &= c \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n),\ c \in R \\
\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) &= \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n) \\
\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) &= \frac{\lim_{n\to\infty}(a_n)}{\lim_{n\to\infty}(b_n)},\ \ \textit{dla}\ \ b_n \neq 0,\ \lim_{n\to\infty}(b_n) \neq 0, \\
\lim_{n\to\infty}(a_n)^p &= \left(\lim_{n\to\infty}(a_n)\right)^p,\ p \neq 0 \\
\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{(a_n)} &= \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty}(a_n)},\ k \in N\backslash\{1\}.
\end{aligned}$$

Przykłady:

Definicja 6. *[granic niewłaściwych]*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty &\iff \forall_{M>0}\ \exists_{n_0\in\mathbf{N}}\ \forall_{n\in\mathbf{N}}\ (n > n_0 \ \Rightarrow\ a_n > M) \\
\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty &\iff \forall_{m<0}\ \exists_{n_0\in\mathbf{N}}\ \forall_{n\in\mathbf{N}}\ (n > n_0 \ \Rightarrow\ a_n < m).
\end{aligned}$$

Rysunek:

WYRAŻENIA NIEOZNACZONE:

podstawowe: $\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0 \cdot \infty,\ \infty - \infty$
wykładnicze: $0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$.

Przykłady:

Twierdzenie 7. *[Tw. o granicy ciągu geometrycznego]*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & dla \quad |q| < 1 \\ 1 & dla \quad q = 1 \\ \infty & dla \quad q > 1 \\ nie\, istnieje & dla \quad q \leq -1 \end{cases}$$

Przykład:

Twierdzenie 8. *[Tw. o trzech ciągach]*

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$ *i od pewnego n zachodzi* $a_n \leq b_n \leq c_n$,
to $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.

Przykład:

Twierdzenie 9.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1 \qquad \textit{dla } c > 0.$$

Dowód:

Twierdzenie 10.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \qquad .$$

Twierdzenie 11. *Ciąg rosnący i ograniczony z góry jest zbieżny.*

Twierdzenie 12. *Ciąg* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *jest rosnący i ograniczony z góry, a więc jest zbieżny oraz*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

.

Przykłady:

Granica funkcji, ciągłość funkcji, asymptoty funkcji

Definicja 13. *otoczenia punktu*

$$Q(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Definicja 14. *sąsiedztwa punktu*

$$S(x_0, \delta) = Q(x_0, \delta) \backslash x_0$$

Definicja 15. *[Df. granicy (właściwej) funkcji wg Heine'go]*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \iff \forall_{(x_n)} \left(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x) = g \right)$$

Funkcja ma w punkcie x_0 granicę g, gdy jej wartości odpowiadające argumentom dążącym do punktu x_0, dążą do liczby g.

Definicja 16. *[Df. granicy (właściwej) funkcji w punkcie wg Cauchy'ego]*
Niech f - określona w $S(x_0, \delta)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \iff \forall_{\epsilon > 0} \, \exists_{\delta > 0} \, \forall_{x \in D_f} \left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon\right)$$

Definicja 17. *[Df. granicy (właściwej) funkcji w nieskończoności wg Cauchy'ego]*
Niech f - określona w (M, ∞) dla dowolnego $M > 0$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = g \iff \forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\Delta>0}\ \forall_{x\in D_f}\ (x > \Delta\ \Rightarrow\ |f(x) - g| < \epsilon)$$

Analogicznie definiujemy granicę właściwą w $-\infty$.

Twierdzenie 18. *[o arytmetyce granic właściwych funkcji]*
Jeżeli funkcje f i g mają granice właściwe w punkcie x_0, to

1. $\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$,
2. $\lim_{x\to x_0} (cf(x)) = c\,(\lim_{x\to x_0} f(x))$,
3. $\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$,
4. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, *o ile* $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$,
5. $\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = (\lim_{x\to x_0} f(x))^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$.

Przykłady:

Twierdzenie 19. *[o trzech funkcjach]*

$$\textit{Jeżeli}\ \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = g\quad \textit{oraz dla } x \in S(x_0, \delta)\ \textit{zachodzi}\ f(x) \le g(x) \le h(x)$$

$$\textit{to} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = g.$$

Twierdzenie zachodzi również, gdy $x \to \infty$ i $x \to -\infty$.
Przykład:

Twierdzenie 20.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Dowód:

Twierdzenie 21.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Przykład:

GRANICE NIEWŁAŚCIWE FUNKCJI

Definicja 22. *[Df. granicy niewłaściwej funkcji w punkcie wg Cauchy'ego]*
Niech f - określona w $S(x_0, \delta)$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall_{M>0}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{x \in D_f}\, (|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > M)$$

Analogicznie definiujemy granicę niewłaściwą $-\infty$.
Rysunek:

Definicja 23. *[Df. granicy niewłaściwej funkcji w nieskończoności wg Cauchy'ego]*
Niech f - określona w $(M, +\infty)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall_{M>0}\, \exists_{\Delta>0}\, \forall_{x \in D_f}\, (x > \Delta \;\Rightarrow\; f(x) > M)$$

Analogicznie definiujemy granicę niewłaściwą ∞ gdy $x \to -\infty$ jak również $-\infty$ gdy $x \to +\infty$ lub $x \to -\infty$. Rysunek:

Twierdzenie 24. *[o granicy funkcji złożonej]*

Jeżeli $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\quad y_0 \neq f(x)$ *dla k.* $x \in S(x_0, \delta)$ *i* $\lim_{y \to y_0} g(y) = g$
to $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g$.

Przykład:

Definicja 25. *[dotycząca granic jednostronnych]*
Niech f - określona w $S^-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0)$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g \iff \forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x \in D_f}\ (-\delta < (x - x_0) < 0\ \Rightarrow\ |f(x) - g| < \epsilon)$$

Niech f - określona w $S^+(x_0, \delta) = (x_0, x_0 + \delta)$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g \iff \forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x \in D_f}\ (0 < (x - x_0) < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - g| < \epsilon)$$

Granica obustronna istnieje wtw, gdy istnieją granice jednostronne i są sobie równe.
Przykład:

Definicja 26. *Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, gdy:*
1) jest określona w punkcie x_0, czyli $x_0 \in D_f$
2) istnieje $\lim_{x \to x_0} f(x)$
3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Przykłady:

Asymptoty

Definicja 27. *Niech $x_0 \notin D_f$. Prosta o równaniu $x = x_0$ jest asymptotą pionową krzywej $y = f(x)$ wtw, gdy istnieje granica niewłaściwa*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \ \ \textit{lub} \ \ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

Przykład:

Definicja 28. *Prostą* $y = ax + b$ *nazywamy asymptotą ukośną (albo poziomą, gdy* $a = 0$*) krzywej* $y = f(x)$*, gdy:*

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

Twierdzenie 29. *Jeżeli krzywa* $y = f(x)$ *ma asymptotę ukośną o równaniu* $y = ax + b$*, to:*

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad i \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax)$$

Przykład: