I Rok INFORMATYKI: wykład 2
Pochodna funkcji

Niech f jest określona w $Q(x_0, \delta)$ i $x \in Q(x_0, \delta)$.
Oznaczenia:

$$\begin{aligned}
\Delta x &= x - x_0 \\
\Delta y &= y - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \text{iloraz różnicowy} \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= tg\beta, \text{ gdzie } \beta - \text{kąt nachylenia siecznej do osi Ox}
\end{aligned}$$

Definicja 1. *[pochodnej]*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

o ile granica ta jest skończona. Pochodną oznaczamy również symbolem $\frac{dy}{dx}$.

Interpretacja geometryczna:

$$f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha, \text{ gdzie } \alpha - \text{kąt nachylenia stycznej do osi Ox}$$

Równanie stycznej do krzywej $y = f(x)$ w pkt. $(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Przykład:

PODSTAWOWE WZORY

$(f \pm g)' = f' \pm g'$	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	$(c)' = 0$
$(c \cdot f)' = c \cdot f'$	$(x^r)' = rx^{r-1}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(e^x)' = e^x$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$(\sinh x)' = \cosh x$	$(\cosh x)' = \sinh x$

Przykłady:

Pochodną funkcji odwrotnej $x = f^{-1}(y)$ do danej $y = f(x)$ wyznaczamy ze wzoru:

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$$

Przykłady:

Pochodną funkcji złożonej $f(g(x))$ wyznaczamy ze wzoru:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Przykłady:

Definicja 2. *Funkcja f jest różniczkowalna w pkt. x_0 wtw, gdy istnieje stała A taka, że:*

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \theta(\Delta x)$$
$$\textit{gdzie } \theta(\Delta x) \to 0 \quad \textit{gdy } \Delta x \to 0$$

Twierdzenie 3. *Funkcja f jest różniczkowalna w pkt. x_0 wtw, gdy istnieje pochodna w tym punkcie. Wtedy $A = f'(x_0)$.*

Mamy:
$\Delta y = \underbrace{f'(x_0) \cdot \Delta x}_{df} + \theta(\Delta x)$.

Różniczkę zupełną df wykorzystujemy do obliczeń przybliżonych, czyli:

$$\Delta y \approx df$$
$$f(x) \approx f(x_0) + df$$

Przykład:

Twierdzenie 4. *[warunek konieczny różniczkowalności funkcji.]*
Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w pkt. x_0, to jest w tym punkcie ciągła.

Definicja 5. *pochodnych wyższych rzędów*

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))', \quad \textit{czyli } \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) \\ &\vdots \\ f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))', \quad \textit{czyli } \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) \end{aligned}$$

Analogicznie definiujemy różniczki wyższych rzędów:

$$\begin{aligned} d^2 f &= f''(x) \cdot (\Delta x)^2 \\ &\vdots \\ d^n f &= f^{(n)}(x) \cdot (\Delta x)^n \end{aligned}$$

Przykład:

Twierdzenie 6. *[Rolle'a]*
Jeżeli f jest ciągła w $\langle a, b\rangle$, ma pochodną w (a, b) i $f(a) = f(b)$, to

$$\exists_{c\in(a,b)} \ f'(c) = 0$$

Twierdzenie 7. *[Lagrange'a]*
Jeżeli f jest ciągła w $\langle a, b\rangle$ i ma pochodną w (a, b), to

$$\exists_{c\in(a,b)} \ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Wnioski:

$$\begin{array}{lcl} f'(x) = 0 \quad \text{dla} \ x \in (a, b) & \iff & f(x) - \text{stała w } (a, b) \\ f'(x) > 0 \quad \text{dla} \ x \in (a, b) & \iff & f(x) - \text{rosnąca w } (a, b) \\ f'(x) < 0 \quad \text{dla} \ x \in (a, b) & \iff & f(x) - \text{malejąca w } (a, b) \end{array}$$

Ekstremum funkcji

Definicja 8. *Funkcja f ma w pkt. x_0 maksimum (minimum) lokalne, jeżeli istnieje sąsiedztwo $S(x_0, \delta)$, takie że dla każdego $x \in S(x_0, \delta)$ spełniona jest nierówność: $f(x) \leq f(x_0) \qquad (f(x) \geq f(x_0))$*

Twierdzenie 9. *[warunek konieczny istnienia ekstremum]*
Jeżeli funkcja f ma w pkt. x_0 ekstremum i ma w tym punkcie pochodną, to $f'(x_0) = 0$. Punkt zerowanie się pochodnej nazywamy punktem stacjonarnym.

Wniosek: Funkcja może mieć ekstremum jedynie w tych punktach, w których pochodna nie istnieje albo jest równa 0.

Twierdzenie 10. *[I warunek wystarczający istnienia ekstremum]*
Jeżeli funkcja f jest ciągła w pkt. x_0 i posiada pochodną w $S(x_0, \delta)$ oraz

$$\begin{array}{lll} f'(x) < 0 & \textit{dla} & x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ f'(x) > 0 & \textit{dla} & x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{array}$$

to ma w x_0 minimum lokalne. Jeżeli zachodzą nieróności:

$$\begin{array}{lll} f'(x) > 0 & \textit{dla} & x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ f'(x) < 0 & \textit{dla} & x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{array}$$

to funkcja ma w x_0 maksimum właściwe.

Przykład:

Twierdzenie 11. *[Taylora]*
Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. *f jest ciągła w $\langle a, b\rangle$,*
2. *f jest $n-1$ razy różniczkowalna w $\langle a, b\rangle$,*
3. *f ma pochodną n-tego rzędu w (a, b),*

to dla każdych dwóch punktów x_0 i $x \in (a, b)$ istnieje punkt c leżący między nimi, taki, że:

$$(*) \quad f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + R_n(c),$$

gdzie

$$R_n(c) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n .$$

Jeżeli przyjmiemy we wzorze (*) $x_0 = 0$, to otrzymany wzór nazywa się wzorem Maclaurina.
Zadania.

Twierdzenie 12. *[II warunek wystarczający istnienia ekstremum]*
Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. *f ma w pewnym otoczeniu $Q(x_0, \delta)$ pochodne do rzędu n włącznie,*
2. *pochodna $f^{(n)}$ jest ciągła w x_0,*
3. *$f'(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,*
4. *$f^{(n)} \neq 0$*

to

- *gdy n jest nieparzysta, to w x_0 funkcja nie ma ekstremum,*
- *gdy n jest parzysta, to w x_0 funkcja ma ekstremum lokalne:*
  - *jeżeli $f^{(n)}(x_0) > 0$, to w x_0 funkcja ma minimum,*
  - *jeżeli $f^{(n)}(x_0) < 0$, to w x_0 funkcja ma maksimum.*

Zadanie.

Wklęsłość, wypukłość, punkty przegięcia wykresu funkcji

Definicja 13. *Mówimy, że funkcja f jest*

- *wypukła w przedziale (a, b), gdy sieczna przechodząca przez punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ leży nad wykresem funkcji f,*
- *wklęsła w przedziale (a, b), gdy sieczna przechodząca przez punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ leży pod wykresem funkcji f.*

Rysunek

Twierdzenie 14. *[warunki wystarczające dla wypukłości i wklęsłości]*

- *Jeżeli* $f''(x) > 0$ *dla każdego* $x \in (a, b)$, *to funkcja* f *jest wypukła w przedziale* (a, b),
- *Jeżeli* $f''(x) < 0$ *dla każdego* $x \in (a, b)$, *to funkcja* f *jest wklęsła w przedziale* (a, b).

Dowód.

Definicja 15. *[punktu przegięcia] Niech funkcja* f *jest określona w* $Q(x_0, \delta)$. *Punkt* $(x_0, f(x_0))$ *jest punktem przegięcia wykresu funkcji* f, *gdy funkcja ta jest wypukła w* $(x_0-\delta, x_0)$ *oraz wklęsła w* $(x_0, x_0+\delta)$, *albo odwrotnie.*

Twierdzenie 16. *[warunek konieczny istnienia punktu przegięcia] Jeżeli funkcja* f *spełnia warunki:*

- $(x_0, f(x_0))$ *jest punktem przegięcia,*

- *istnieje* $f''(x_0)$,

to $f''(x_0) = 0$.

Wniosek: Funkcja może mieć punkty przegięcia jedynie w punktach zerowania się jej pochodnej II rzędu, albo w punktach, w których pochodna ta nie istnieje.

Twierdzenie 17. *[I warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia] Jeżeli funkcja* f *spełnia warunki:*

- f *ma pochodną w* x_0,
- $f''(x) < 0$ *dla* $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ *oraz* $f''(x) > 0$ *dla* $x \in (x_0, x_0 + \delta)$,

to $(x_0, f(x_0))$ *jest punktem przegięcia. Mogą zachodzić nierówności odwrotne do powyższych.*

Zadanie.

Twierdzenie 18. *[reguła de l'Hospitala]*
Jeżeli: 1. dziedziny funkcji $\frac{f}{g}$ *i* $\frac{f'}{g'}$ *zawierają pewne* $S(x_0, \delta)$

2. a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ *albo b)* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

3. istnieje granica $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *(właściwa lub niewłaściwa),*

to istnieje również granica $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *i zachodzi równość:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Twierdzenie powyższe jest również prawdziwe dla granic jednostronnych i gdy $x \to \pm\infty$.

Przykłady:

Badanie funkcji

1. dziedzina funkcji
2. cechy szczególne: miejsca zerowe, parzystość, nieparzystość, okresowość, itd.
3. asymptoty
4. badanie y'
5. badanie y''
6. tabelka
7. wykres

Przykład: