

LISTA 6: całki niewłaściwe, rachunek różniczkowy funkcji dwóch zmiennych

1. Obliczyć całki niewłaściwe I rodzaju:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx, \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx, \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_0^{\infty} e^{-x} dx, \quad \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx.$$

2. Obliczyć całki niewłaściwe II rodzaju:

$$\int_1^3 \frac{1}{x-1} dx, \quad \int_1^2 \frac{1}{(x-2)^2} dx, \quad \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}.$$

3. Wyznaczyć i naszkicować dziedziny następujących funkcji:

$$f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, \quad f(x, y) = \sqrt{xy}, \quad f(x, y) = \frac{xy}{y-x},$$

$$f(x, y) = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{9-x^2}, \quad f(x, y) = \sqrt{x \sin y}, \quad f(x, y) = \arcsin \frac{y-1}{x}.$$

4. Wykreślić funkcje:

$$a) f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}, \quad b) f(x, y) = x^2 + (y-1)^2, \quad c) f(x, y) = x^2 + y^2 + 1, \quad d) f(x, y) = 2 - \sqrt{1-y^2}.$$

5. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji:

$$z = (5x^3y^2 + 2x)^3, \quad z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}), \quad z = y\sqrt{x} - e^{-x} \ln y,$$

$$z = 2x^{3y}, \quad z = \sin^2 3x + 2y - xy, \quad z = x^2 \sqrt{\lg x} - e^x \cos^2 y.$$

6. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $z = y^4 - 3x^2$, która jest równoległa do płaszczyzny $\pi: 3x + 12y - z - 5 = 0$.

7. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $z = 1 + x^2 + y^2$, która jest prostopadła do prostej $l: 3x = 2y = z$.

8. Obliczyć pochodną kierunkową w punkcie (1,1) w kierunku wektora \vec{s} :

$$a) z = \sqrt{xy}, \quad \vec{s} = [2, 3], \quad b) z = x^2 + 3xy + 2y^2 + x, \quad \vec{s} = [2, -1], \quad c) z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 1) \vec{s} = [1, 0], \quad 2) \vec{s} = [0, 1].$$

9. Sprawdzić, że funkcje z spełniają równania:

$$(a) z = x^y, \quad \frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial z}{\partial y} = 2z,$$

$$(b) z = 4e^{-2y} + (2x + 4y - 3)e^{-y} - x - 1, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial y} + x + z = 0,$$

$$(c) z = f(x^2 + y^2), \quad y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

10. Wykorzystując różniczkę zupełną odpowiedniej funkcji wyznaczyć w przybliżeniu wartość wyrażeń:

$$\sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^3}, \quad \ln \frac{1}{\sqrt{(0,1)^2 + (0,9)^3}},$$

11. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

(a) $z = x^2 + 8y^3 - 6xy + 5$,

(b) $z = 3 \ln \frac{x}{6} + 2 \ln y + \ln(12 - x - y)$,

(c) $z = e^{x+2y}(x^2 - y^2)$,

(d) $z = xy + x^2 - x + y^2 + 2y$,

(e) $z = x^3 + xy + y^2 - 2x + 3y - 1$,

(f) $z = 2\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} - 4x$.