LISTA 7: szeregi liczbowe i potęgowe

1. Obliczyć sumy szeregów:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$. Zastosować wzór: $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{\frac{1}{2}}{n+2}$,

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$. Zastosować wzór: $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$. Zastosować wzór na sumę szeregu geometrycznego.

2. Zbadać zbieżność szeregów:

   (a) wykorzystując warunek konieczny:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}, \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{50n+1}, \qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \sqrt[n]{n}, \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n},$$
$$5)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right).$$

   (b) stosując kryterium całkowe (lub porównawcze):

$$1)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-2n+1}, \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}, \qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}, \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}.$$

   (c) stosując kryterium ilorazowe:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}, \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}, \qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{2^n}, \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

   (d) stosując kryterium pierwiastkowe:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{3^n}, \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2}\operatorname{arctg} n)^n, \qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n, \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n.$$

3. Zbadać zbieżność bezwzględną i warunkową szeregów liczbowych:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n\sqrt{n}}, \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n2^n}, \qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}, \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$$
$$5)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}.$$

4. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregów potęgowych:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n2^n}, \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}, \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{2n}.$$

5. Rozwinąć w szereg Taylora w otoczeniu punktu x_0 funkcję:

   (a) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 1,$

   (b) $f(x) = \cos 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4},$

   (c) $f(x) = e^x, \quad x_0 = 1.$

6. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję:

   (a) $f(x) = e^x,$

   (b) $f(x) = \cosh x,$

   (c) $f(x) = \cos x,$

   (d) $f(x) = \ln(x + 1),$

   (e) $f(x) = \sinh x.$