

LISTA 9: równania różniczkowe zwyczajne I rzędu

1. Sprawdzić, że dana funkcja jest całką podanego obok równania:

$$a) y = Ce^{-2x}, \quad y' + 2y = 0, \quad b) x^2 + 2xy = C, \quad (x + y)dx + xdy = 0.$$

2. Znając całkę ogólną $2x^2 + y^2 = C$ pewnego równania różniczkowego, znaleźć i sporządzić wykresy krzywych całkowych tego równania (całek szczególnych), przechodzących przez punkty $B_1(-1, 0)$, $B_2(0, -3)$, $B_3(2, 0)$.

3. Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych. Jeżeli został podany warunek początkowy, to podać rozwiązanie szczególne.

$$\begin{aligned} a) (y + xy)dx + (x - xy)dy &= 0, & b) x^2(2yy' - 1) &= 1, \\ c) y^2 + x^2y' &= 0, \quad y(-1) = 1; & d) 2(1 + e^x)yy' &= e^x, \quad y(0) = 0; \\ e) (1 + x^2)y^3dx - (y^2 - 1)x^3dy &= 0, \quad y(1) = -1. \end{aligned}$$

4. Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania różniczkowego jednorodnego. Jeżeli został podany warunek początkowy, to podać rozwiązanie szczególne.

$$\begin{aligned} a) x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy &= 0, & b) (x^2 - y^2)dx + 2xydy &= 0, \\ c) y' = \frac{x - y}{x - 2y} & & d) xy' = y \ln \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1. \end{aligned}$$

5. Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania różniczkowego liniowego. Jeżeli został podany warunek początkowy, to podać rozwiązanie szczególne.

$$\begin{aligned} a) y' - y \sin x &= \sin x \cos x, & b) (1 + x^2)y' - 2xy &= (1 + x^2)^2, & c) y' + 2xy &= 2xe^{-x^2}, \\ d) y' + \frac{3}{x}y &= \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1, & e) xy' &= x + 2y, \quad y(0) = 0. \end{aligned}$$

6. Wyznaczyć rozwiązania szczególne równania różniczkowego Bernoulliego:

$$\begin{aligned} a) xy' + y &= y^2 \ln x, \quad y(1) = 1, & b) 2y' \ln x + \frac{y}{x} &= \frac{1}{y} \cos x, \quad y(e) = 1, \\ c*)xy' - y &= y^2, \quad y(0) = 0. \end{aligned}$$