

Wykład 5: całki niewłaściwe

Definicja 1. [całki niewłaściwej I rodzaju] Niech funkcja f będzie całkowna na $\langle a, T \rangle$, dla każdego $T > a$.

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_a^T f(x) dx$$

Rysunek:

Jeżeli granica po prawej stronie jest skończona, to mówimy że całka niewłaściwa $\int_a^{\infty} f(x) dx$ jest zbieżna. Jeżeli granica ta nie istnieje lub jest nieskończona, to mówimy, że całka nie istnieje lub jest rozbieżna.

Analogicznie gdy $x \in (-\infty, a)$:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{T \rightarrow -\infty} \int_T^a f(x) dx$$

Przykład:

Całkę niewłaściwą na $(-\infty, +\infty)$ określamy następująco:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

Definicja 2. [całki niewłaściwej II rodzaju] Niech funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie nieograniczona na $S^+(a, \delta)$ oraz całkowna na $\langle t, b \rangle$, dla każdego $t \in S^+(a, \delta)$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx$$

Analogicznie gdy $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ i f - nieograniczona w $S^-(b, \delta)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx$$