Wykład 7: Szeregi liczbowe i potęgowe.

Definicja 1. *Niech (a_n) - ustalony ciąg liczbowy. Określamy nowy ciąg:*

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ciąg sum częściowych (S_n) nazywamy szeregiem liczbowym i zapisujemy: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
S_n - n-ta suma częściowa
a_n - wyraz ogólny szeregu

Jeżeli ciąg sum częściowych (S_n) jest zbieżny czyli $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, to mówimy, że szereg jest zbieżny, a S nazywamy sumą szeregu. Piszemy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.
Przykład:

Twierdzenie 1. *[Warunek konieczny zbieżności]*
Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dowód:
Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.
Wtedy $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - S_{n-1} = S - S = 0$.
Wniosek: jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Przykład 1.

Przykład 2.

Definicja 2. *[Szeregi Dirichleta (harmoniczne rzędu r)]*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} \; - \left\{ \begin{array}{c} \textit{zbieżny} \;\; \textit{dla } r > 1 \\ \textit{rozbieżny dla } r \leq 1 \end{array} \right. ,$$

Przykład

Definicja 3. *[Szeregi geometryczne:]*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \; - \left\{ \begin{array}{cc} \textit{zbieżny i } S = \frac{1}{1-q} & \textit{dla } |q| < 1 \\ \textit{rozbieżny} & \textit{dla } |q| \geq 1 \end{array} \right.$$

Przykład

SZEREGI O WYRAZACH NIEUJEMNYCH

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ dla każdego $n \in N$.
Kryterium porównawcze:
Jeżeli dane są dwa szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ takie, że $0 \leq a_n \leq b_n$ (dla każdego n lub dla każdego $n \geq n_0$), to:
1) jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ też jest zbieżny,
2) jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ też jest rozbieżny.
Przykłady:

Pomnożenie szeregu przez liczbę oraz pominięcie skończonej ilości jego wyrazów nie wpływa na jego zbieżność.

Kryterium ilorazowe d'Alamberta
Niech $a_n > 0$.

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, to:
1) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, gdy $g < 1$,
2) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, gdy $g > 1$,
3) kryterium nie rozstrzyga, gdy $g = 1$.
Przykład:

Kryterium pierwiastkowe Cauchy'ego
Niech $a_n \geq 0$.
Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$, to:
1) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, gdy $g < 1$,
2) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, gdy $g > 1$,
3) kryterium nie rozstrzyga, gdy $g = 1$.
Przykład:

Kryterium całkowe
Niech $a_n > 0$ oraz $a_n > a_{n+1}$.
Jeżeli $a_n = f(n)$, to tworzymy funkcję malejącą $f(x)$, (zastepując zmienną $n \in \mathbb{N}$ zmienną $x \in \mathbb{R}$). Wtedy

1) jeżeli całka $\int_1^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna, to szereg szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

2) jeżeli całka $\int_1^{\infty} f(x)dx$ jest rozbieżna, to szereg szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.
Przykład:

SZEREGI NAPRZEMIENNE

-szeregi o wyrazach na przemian dodatnich i ujemnych: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, \quad a_n > 0.$

Kryterium Leibniza

Jeżeli $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \geq a_{n+1} \geq ...$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ jest zbieżny.

Przykład:

SZEREGI O WYRAZACH DOWOLNYCH

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ szereg o wyrazach dowolnych}$$

$$(**) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ szereg wartości bezwzględnych}$$

Jeżeli szereg (**) jest zbieżny, to szereg (*) jest zbieżny (i mówimy, że jest zbieżny bezwzględnie).

Jeżeli szereg (**) jest rozbieżny, a szereg (*) jest zbieżny, to mówimy, że (*) jest zbieżny warunkowo.

Przykłady:

SZEREGI FUNKCYJNE

Definicja 4. *Ciąg funkcyjny w zbiorze X jest to przyporządkowanie każdej liczbie naturalnej dokładnie jednej funkcji określonej w tym zbiorze:*

$$\begin{array}{ccc} 1 & \to & f_1(x) \\ 2 & \to & f_2(x) \\ & \vdots & \\ n & \to & f_n(x) \\ & \vdots & \end{array}$$

Oznaczenia:

$$(f_n(x)) - \textit{ciąg funkcyjny}$$
$$f_n(x) - n\textit{-ty wyraz ciągu}$$

Przykłady:

Definicja 5. *[granicy ciągu funkcyjnego]*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \iff \forall_{\epsilon>0}\forall_{x\in X}\exists_{n_0\in N}\forall_{n\geq n_0}|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Definicja 6. *[szeregu funkcyjnego] Niech $(f_n(x))$ - ustalony ciąg funkcyjny na X. Ciąg $(S_n(x))$ sum $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ nazywamy szeregiem funkcyjnym i piszemy:*

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Szereg $(*)$ jest zbieżny w zb. X, jeżeli ciąg jego sum częściowych $(S_n(x))$ jest zbieżny. Wtedy:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

Badanie zbieżności szeregu (*):

1. ustalamy x,
2. badamy zbieżność bezwzględną szeregu (*) traktując go jak szereg liczbowy,
3. Z odpowiedniego kryterium wyznaczamy obszar zbieżności tego szeregu.

Przykłady:

SZEREGI POTĘGOWE

Definicja 7. *[szeregu potęgowego]*

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad x_0 = const, \ \ a_n - \textit{ustalony ciąg liczbowy.}$$

Definicja 8. *Promieniem zbieżności szeregu potęgowego nazywamy liczbę określoną następująco:*

$$R = sup\{r : \ |x-x_0| < r \ \wedge \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n - zbie\dot{z}ny\}$$

Twierdzenie 2. *Jeżeli istnieje granica*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda \;\; dla \;\; a_n \neq 0 \quad lub \quad \lim_{n\to\infty}|\sqrt[n]{a_n}| = \lambda$$

to:

$$R = \begin{cases} 0 & gdy \quad \lambda = +\infty \\ \frac{1}{\lambda} & gdy \; 0 < \lambda < +\infty \\ +\infty & gdy \qquad \lambda = 0 \end{cases},$$

Przykłady:

SZEREGI TAYLORA I MACLAURINA

Definicja 9. *Szeregiem Taylora odpowiadającym danej funkcji f, która w pewnym otoczeniu $Q(x_0,\delta)$ ma pochodne wszystkich rzędów, nazywamy szereg potęgowy:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \;\; dla \;\; x \in Q(x_0,\delta)$$

Piszemy

$$f(x) \;\sim\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Jeżeli $x_0 = 0$, to szereg nazywamy szeregiem Maclaurina.

Uwaga. Szereg Taylora (Maclaurina) odpowiadający danej funkcji może być zbieżny, ale niekoniecznie do tej funkcji, albo rozbieżny.
Jeżeli

$$(*) \quad f(x) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

to mówimy, że funkcja jest rozwijalna w szereg Taylora (Maclaurina).

Twierdzenie 3. *Jeżeli*

$$f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

i $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$*, to funkcja* f *jest rozwijalna w* $Q(x_0, \delta)$ *i zachodzi (*).*

Przykłady: