Wykład 10: równania różniczkowe zwyczajne II rzędu

Definicja 1. *Równaniem różniczkowym II rzędu nazywamy równanie* $y'' = f(x, y, y')$ *(postać normalna) lub* $(*)$ $F(x, y, y', y'') = 0$ *(postać ogólna), z niewiadomą funkcją* y.

Funkcję $y = y(x)$ nazywamy całką równania $(*)$ na (a, b), jeżeli jest ona dwukrotnie różniczkowalna na tym przedziale i jeżeli spełnia ona to równanie, czyli:

$$F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0.$$

Definicja 2. *Zagadnienie początkowe dla równania* $y'' = f(x, y, y')$:
wyznaczyć takie rozwiązanie $y(x)$ *tego równania, które spełnia warunki początkowe:*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1.$$

Definicja 3. *Zagadnienie brzegowe dla równania* $y'' = f(x, y, y')$:
wyznaczyć takie rozwiązanie $y(x)$ *tego równania, które spełnia warunki brzegowe:*

$$y(a) = y_a, \quad y'(b) = y_b.$$

W interpretacji geometrycznej, rozwiązanie zagadnienia początkowego polega na wybraniu z rodziny krzywych dokładnie jednej przechodzącej przez punkt (x_0, y_0) taką że styczna w tym punkcie ma współczynnik kierunkowy równy y_1 .

W interpretacji geometrycznej, rozwiązanie zagadnienia brzegowego polega na wybraniu z rodziny krzywych dokładnie jednej przechodzącej przez dwa punkty (a, y_a) i (b, y_b).

Przykład.

RÓWNANIA RZĘDU II SPROWADZALNE DO RÓWNAŃ RZĘDU I

Równanie postaci: $y'' = f(x, y')$ (brak y).

Sprowadzamy je do równanie rzędu I przez podstawienie $u = y'$. Wtedy $y'' = u'$. Otrzymamy:

$$u' = f(x, u)$$

Przykład:

Równanie postaci: $y'' = f(y, y')$ (brak x).

Traktujemy wtedy y jako argument i wtedy y' jest pewną funkcją zmiennej y. Robimy podstawienie:

$$y' = p(y).$$

Wtedy

$$y'' = p'(y) \cdot y' = p'(y) \cdot p.$$

Otrzymamy równanie: $p' \cdot p = f(y, p)$.

Przykład:

RÓWNANIA RZĘDU II LINIOWE

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (*)$$

gdzie $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ funkcje ciągłe na (a,b).

Twierdzenie 1. *jeżeli funkcje $p(x)$ i $q(x)$ są ciągłe w (a,b), to zagadnienie początkowe dla równania (*) ma dla każdej trójki liczb: $x_0 \in (a,b)$, y_0 i y_1 dokladnie jedno rozwiązanie.*

CORN=CORJ+CSRN

Wyznaczanie CORJ

Rozwiązujemy:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (**)$$

Twierdzenie 2. *Jeżeli funkcje $y_1(x)$ i $y_2(x)$ spełniają równanie $(**)$ w pewnym przedziale, to każda funkcja :*

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \quad gdzie c_1,\, c_2 - dowolne\ stałe$$

też spełnia równanie w tym przedziale.

Definicja 4. *Dwie całki $y_1(x)$ i $y_2(x)$ równania $(**)$ nazywamy układem fundamentalnym całek tego równania, jeżeli:*

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Twierdzenie 3. *Jeżeli całki $y_1(x)$ i $y_2(x)$ równania stanowią układ fundamentalny na (a,b), to*

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

gdzie c_1, c_2 – dowolne stałe, jest rozwiązaniem ogólnym równania $(**)$ czyli CORJ.

Fakt. Jeżeli znamy jedną całkę równania jednorodnego $y_1(x)$, to druga całka będzie postaci $y_2(x) = c \cdot y_1(x)$. Całki te nie tworzą jednak układu fundamentalnego. Odpowiednią (niezależną całkę) wyznaczymy uzmienniając stałą, czyli przyjmując:

$$y_2(x) = c(x) \cdot y_1(x).$$

Przykład

Wyznaczanie CSRS -metoda uzmienniania stałych

W CORJ przyjmujemy $c_1 = c_1(x)$ i $c_2 = c_2(x)$. Wtedy

$$y = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x)$$

i dalej

$$y' = c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x).$$

Żądamy, aby

$$c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \qquad (\clubsuit).$$

Stąd:

$$y' = c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x).$$

Dalej:

$$y'' = c_1'(x)\cdot y_1'(x) + c_1(x)\cdot y_1''(x) + c_2'(x)\cdot y_2'(x) + c_2(x)\cdot y_2''(x).$$

Wstawiamy do $(*)$ $\quad y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$.

$$c_1'(x)\cdot y_1'(x) + c_1(x)\cdot y_1''(x) + c_2'(x)\cdot y_2'(x) + c_2(x)\cdot y_2''(x) + p(x)[c_1(x)\cdot y_1'(x) + c_2(x)\cdot y_2'(x)] +$$
$$+q(x)[c_1(x)\cdot y_1(x) + c_2(x)\cdot y_2(x)] = f(x)$$

Porządkujemy ze względu na funkcje $y_1(x)$ i $y_2(x)$.

$$c_1'(x)\cdot y_1'(x) + c_1(x)\cdot y_1''(x) + c_2'(x)\cdot y_2'(x) + c_2(x)\cdot y_2''(x) + p(x)[c_1(x)\cdot y_1'(x) + c_2(x)\cdot y_2'(x)] +$$
$$+q(x)[c_1(x)\cdot y_1(x) + c_2(x)\cdot y_2(x)] = f(x)$$

Otrzymamy:

$$c_1'(x)\cdot y_1'(x) + c_2'(x)\cdot y_2'(x) + c_1(x)\cdot[y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)] +$$
$$+c_2(x)\cdot[y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)] = f(x)$$

I dalej:

$$c_1'(x)\cdot y_1'(x) + c_2'(x)\cdot y_2'(x) + c_1(x)\cdot\underbrace{[y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)]}_{=0} +$$
$$+c_2(x)\cdot\underbrace{[y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)]}_{=0} = f(x)$$

Stąd:

$$c_1'(x)\cdot y_1'(x) + c_2'(x)\cdot y_2'(x) = f(x) \quad (\heartsuit)$$

Otrzymamy układ równań z $(\clubsuit)$ i $(\heartsuit)$:

$$\begin{aligned} c_1'(x)\cdot y_1(x) + c_2'(x)\cdot y_2(x) &= 0 && (\clubsuit)\\ c_1'(x)\cdot y_1'(x) + c_2'(x)\cdot y_2'(x) &= f(x) && (\heartsuit)\end{aligned}$$

Ze wzorów Cramera:

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}}{W(x)}, \qquad c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x)\end{vmatrix}}{W(x)}.$$

gdzie

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix} \neq 0.$$

Całkujemy:

$$c_1(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)}\, dx, \qquad c_2(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}}{W(x)}\, dx,$$

wstawiamy do $(**)$ i otrzymujemy CSRN. Końcowe rozwiązanie otrzymamy: CORN=CORJ+CSRN.
Przykład cd.

RÓWNANIA RZĘDU II LINIOWE O STAŁYCH WSPÓŁCZYNNIKACH

Równanie postaci: $y'' + py' + qy = f(x)$, gdzie p, q stałe.

Kolejny raz CORN=CORJ+CSRN.

Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne: $y'' + py' + qy = 0 \quad (RJ)$.

Podstawiamy: $y(x) = e^{rx}$, gdzie $r \in \mathbb{C}$. Wtedy: $y'(x) = re^{rx}$ oraz $y''(x) = r^2 e^{rx}$. Wstawiamy do (RJ):

$$r^2 e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx} = 0.$$

Stąd:

$$e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0 \quad | : e^{rx} \neq 0.$$

Otrzymamy

$$\underbrace{r^2 + pr + q = 0}_{\text{równanie charakterystyczne}} \qquad .$$

- Jeśli $\Delta = p^2 - 4q > 0$, to $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.

  $y_1(x) = e^{r_1 x}$, $y_2(x) = e^{r_2 x}$ -całki liniowo niezależne takie, że $W(x) \neq 0$ (tworzą układ fundamentalny). Stąd:

  $$CORJ : y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

  Przykład:

- Jeśli $\Delta = p^2 - 4q = 0$, to $r_0 \in \mathbb{R}$.

  Otrzymamy jedną całkę: $y_1(x) = e^{r_0 x}$. Można udowodnić, że również funkcja $y_2(x) = xe^{r_0 x}$ jest całką równania (RJ). Obie całki tworzą układ fundamentalny. Otrzymamy: Stąd:

  $$CORJ : y(x) = c_1 e^{r_0 x} + c_2 x e^{r_0 x}.$$

  Przykład:

- Jeśli $\Delta = p^2 - 4q < 0$, to $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$. Można wykazać, że $r_1 = \overline{r_2}$ czyli

$$r_1 = a + bi \text{ oraz } r_2 = a - bi \text{ dla } a, b \in \mathbb{R}.$$

Niech

$y^*(x) = e^{r_1 x} = e^{(a+bi)x} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$ -całka zespolona

Korzystamy z twierdzenia:

Twierdzenie 4. *Jeżeli funkcja $y = u(x) + iv(x)$ jest całką równania $y'' + py' + qy = 0$, to funkcje $y = u(x)$ oraz $y = v(x)$ są również całkami tego równania.*

Dowód. Mamy:

$$\begin{aligned} &y' = u'(x) + iv'(x) \\ &\text{oraz} \\ &y'' = u''(x) + iv''(x) \end{aligned}$$

Wstawiamy y, y' oraz y'' do równania (RJ):

$$u''(x) + iv''(x) + p[u'(x) + iv'(x)] + q[u(x) + iv(x)] = 0.$$

I dalej:

$$u''(x) + pu'(x) + qu(x) + i[v''(x) + pv'(x) + qv(x)] = 0.$$

Zauważmy, że wtedy część rzeczywista musi być równa 0, jak i urojona też. Tak więc:

$$\begin{aligned} u''(x) + pu'(x) + qu(x) = 0 \\ v''(x) + pv'(x) + qv(x) = 0 \end{aligned}$$

Stąd widać, że $y = u(x)$ oraz $y = v(x)$ są całkami równania (RJ).

W naszym przypadku: $y_1(x) = e^{ax} \cos bx$ oraz $y_2(x) = e^{ax} \sin bx$. Tworzą one układ fundamentalny.

Stąd:

$$CORJ : y(x) = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx.$$

Przykład:

CSRN wyznaczamy:

- metodą uzmienniania stałych - wzory (♣ ♡) albo
- metodą przewidywań.

f(x)	przewidywana CSRN
wielomian $W_n(x)$	wielomian $Q_n(x)$
$\sin ax$	$A\sin ax + B\cos ax$
$\cos ax$	$A\sin ax + B\cos ax$
e^{bx}	De^{bx}
suma powyższych	suma powyższych
iloczyn powyższych	iloczyn powyższych

Przykłady: