Wykład 6: funkcje dwóch zmiennych

Definicja 1. *Funkcją n zmiennych określoną na zbiorze $D \subset \mathbb{R}^n$ o wartościach w $\mathbb{R}$ nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi ze zbioru D dokładnie jednej liczby rzeczywistej. Piszemy:*
$f: (x_1, x_2, ..., x_n) \to \mathbb{R}$.

Zbiór $f(A) = \{f(x_1, x_2, ..., x_n) : (x_1, x_2, ..., x_n) \in A \subset D\}$ - nazywamy **obrazem zbioru** A przez odwzorowanie f. Zbiór $f(D)$ - nazywamy **zbiorem wartości** funkcji lub przeciwdziedziną.
Przez **dziedzinę funkcji** rozumiemy tzw. dziedzinę naturalną funkcji t.j. zbior tych wszystkich punktów z przestrzeni $\mathbb{R}^n$ dla ktorych wzor funkcji ma sens.
Przyklady.

W przypadku funkcji 2 zmiennych możemy przedstawić jej wykres. **Wykresem funkcji** $z = f(x, y)$ nazywamy zbiór:
$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_f, \ z = f(x, y)\}$.
Przykłady:

Definicja 2. *[granicy właściwej funkcji n zmiennych w punkcie]*

$$\lim_{(P)\to(P_0)} f(x,y) = g \Longleftrightarrow \forall_{(P_n)} \Big((P_n) \in D \wedge P_k \neq P_0 \textit{ dla } k \in \mathbb{N} \wedge \lim_{n\to\infty} (P_n) = (P_0) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(P_n) = g \Big)$$

Słownie: Funkcja f ma w punkcie P_0 granicę g wtw, gdy dla dowolnego ciągu punktów (P_n) z dziedziny funkcji i różnych od P_0, zbieżnego do punktu P_0, odpowiedni ciąg wartości funkcji $f(P_n)$ jest zbieżny do g.

Przykłady:

Definicja 3. *[funkcji ciągłej]*
Niech $P_0 \in D$. Funkcja f jest ciągła w punkcie w punkcie P_0 wtw, gdy:

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$$

(granica funkcji w punkcie jest równa wartości funkcji w tym punkcie)

Przykład:

Rachunek różniczkowy funkcji 2 (wielu) zmiennych

OZNACZENIA: $Q(P_0, \delta) = \{(x, y) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$
Rysunek:

Definicja 4. *[Pochodnej cząstkowej względem x] Niech funkcja f będzie określona na obszarze $D \subset R^2$ i niech $(x_0, y_0) \in D$. Pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji f względem x w punkcie (x_0, y_0) określamy wzorem:*

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Piszemy też: $f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$.
Analogicznie definiujemy pochodną cząstkową 'po y':

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

i piszemy $f'_x y = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Przykład:

Interpretacja geometryczna

Przykłady:

Pochodna funkcji złożonej

Niech $z = f(x, y)$ gdzie x oraz y są funkcjami pewnej zmiennej t, czyli $x = x(t)$ i $y = y(t)$. Wtedy

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Przykład.

Jeżeli $z = f(x, y)$ gdzie y jest funkcją zmiennej x, czyli $y = y(x)$. Wtedy

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Przykład.

Jeżeli $z = f(x, y)$ gdzie x oraz y są funkcjami zmiennych s i t, czyli $x = x(s, t)$ i $y = y(s, t)$. Wtedy

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}.$$

Przykład.

Gradient funkcji, pochodna kierunkowa funkcji

Definicja 5. Gradientem funkcji *$z = f(x, y)$ w punkcie $P_0 = (x_0, y_0)$ nazywamy wektor mający początek w tym punkcie o współrzędnych będących wartościami pochodnych cząstkowych:*

$$grad\, f(P_0) = [f'_x(P_0), f'_y(P_0)].$$

Analogicznie dla funkcji 3 zmiennych i punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

$$grad\, f(P_0) = [f'_x(P_0), f'_y(P_0), f'_z(P_0)].$$

Rysunek.

Przykłady:

Definicja 6. **Pochodną kierunkową** *funkcji* $z = f(x, y)$ *w punkcie* $P_0 = (x_0, y_0)$ *w kierunku wersora* $\overrightarrow{s} = [\cos\alpha, \cos\beta]$ *nazywamy następującą granicę:*

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{|\overrightarrow{P_0P}|}$$

i oznaczamy: $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{s}}$, *gdzie* $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{P_0P}$.

Przykład.

WZÓR

Niech wektor $\overrightarrow{s} = [\cos\alpha, \cos\beta]$. Wtedy

$$\frac{df}{d\overrightarrow{s}}(P_0) = f'_x(P_0) \cdot \cos\alpha + f'_y(P_0) \cdot \cos\beta.$$

Stąd

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{s}}(P_0) = \mathrm{grad} f(P_0) \circ [\cos\alpha, \cos\beta].$$

Dowód: Niech $|\overrightarrow{P_0 P}| = t$. Wtedy $x = x_0 + t\cos\alpha$, $y = y_0 + t\cos\beta$. Funkcja $f(P)$ jest funkcją złożoną parametru t oraz:

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{s}} = \lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{|\overrightarrow{P_0 P}|} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0).$$

Pochodna φ' wyraża się wzorem: $\varphi'(t) = f'_x \cos\alpha + f'_y \cos\beta$. Stąd wynika WZÓR.
Przykład.

Różniczkowalność funkcji

Definicja 7. *Oznaczenia:* $\Delta f = f(x,y) - f(x_0, y_0)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$.
Funkcję $f(x,y)$ *nazywamy* **różniczkowalną** *w punkcie* $P_0 = (x_0, y_0)$ *jeżli istnieją takie liczby* A *i* B, *że dla każdego dostatecznie małego* θ *zachodzi:*

$$\begin{aligned} \Delta f &= A\Delta x + B\Delta y + o(\theta) \\ & \quad gdzie\ \theta = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \ \ i \ \ \lim_{\theta \to 0} o(\theta) = 0 \end{aligned}$$

Można wykazać, że jeżeli funkcja jest różniczkowalna w (x_o, y_o), to $A = f'_x(x_0, y_0)$ i $B = f'_y(x_0, y_0)$.

Definicja 8. Różniczką zupełną *funkcji* $f(x,y)$ *w punkcie* (x_0, y_0) *nazywamy wyrażenie:*

$$df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

Stąd mamy: $\Delta f = df + o(\theta)$ i $\lim_{\theta \to 0} 0(\theta) = 0$. Możemy przyjąć w przybliżeniu:

$$\Delta f \approx df$$

Analogicznie dla funkcji trzech zmiennych:

$$df(x_0, y_0, z_0)(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = f'_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z.$$

Przykład:

Twierdzenie 9. *[warunek wystarczający różniczkowalności funkcji]*
Niech funkcja f będzie określona na $Q(P_0, \delta)$ i niech pochodne cząstkowe f'_x, f'_y istnieją na $Q(P_0, \delta)$ i są ciągłe w pkt. P_0. Wtedy funkcja f jest różniczkowalna w tym punkcie.

Interpretacja geometryczna różniczkowalności funkcji 2 zmiennych

Różniczkowalność f w pkt. (x_0, y_0) oznacza, że istnieje płaszczyzna styczna do wykresu tej funkcji w pkt. $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:
$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.
Wtedy $\overrightarrow{n} = [-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1]$ - wektor normalny do wykresu funkcji $z = f(x, y)$.

Pochodne wyższych rzędów:

$$
\begin{aligned}
&f''_{xx} = (f'_x)'_x \;\text{ czyli }\; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\
&f''_{xy} = (f'_x)'y \;\text{ czyli }\; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\
&f''_{yy} = (f'_y)'_y \;\text{ czyli }\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&f''_{yx} = (f'_y)_x \;\text{ czyli }\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&f'''_{x^3} = (f'_x)'_x \;\text{ czyli }\; \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\\
&\text{itd}
\end{aligned}
$$

Przykład:

Twierdzenie 10. *[Schwarza o pochodnych mieszanych] Niech funkcja f będzie określona na $Q(P_0, \delta)$. Jeżeli pochodne cząstkowe istnieją na $Q(P_0, \delta)$ i są ciągłe w punkcie P_0, to*

$$f''_{xy}(P_0) = f''_{yx}(P_0)$$

Twierdzenie zachodzi dla funkcji n zmiennych i dla pochodnych mieszanych wyższych rzędów.

Przykład:

Różniczki wyższych rzędów

Definicja 11. Różniczką 2 rzędu *funkcji $z = f(x, y)$ nazywamy różniczkę jej różniczki 1 rzędu, czyli $d^2 f = d(df)$;* **różniczką n-tego rzędu** *funkcji $z = f(x, y)$ nazywamy różniczkę jej różniczki $n - 1$-ego rzędu, czyli $d^n f = d(d^{n-1} f)$.*

Różniczki obliczamy ze wzorów:

$$\begin{aligned} d^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2, \\ d^3 f &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\Delta x)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\Delta x)^2 \Delta y + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\Delta x (\Delta y)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\Delta y)^3 \end{aligned}$$

Przykład:

Ekstrema funkcji

Definicja 12. *Funkcja f ma w pkt. $(x_0, y_0) \in D_f$ minimum (maksimum) lokalne, jeżeli istnieje takie sąsiedztwo $S((x_0, y_0), \delta)$, że w każdym punkcie $(x, y) \in S$ zachodzi warunek:*

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \qquad (\leq)$$

Twierdzenie 13. *[warunek konieczny istnienia ekstremum] Jeżeli f jest różniczkowalna na $Q((x_0, y_0), \delta)$ i ma w pkt. (x_0, y_0) ekstremum lokalne, to*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad i \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Wniosek:

Twierdzenie 14. *[warunek wystarczający istnienia ekstremum]*
Niech f jest określona na $Q((x_0, y_0), \delta)$ i niech ma ciągłe pochodne cząstkowe II rzędu na Q. Jeżeli

$$1.\ \ f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad i \quad f'_y(x_0, y_0) = 0,$$

$$2.\ \ W(x_0, y_0) = det \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} > 0,$$

to funkcja f ma ekstremum lokalne w pkt. (x_0, y_0) i jest to
a) minimum lokalne jeżeli $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$,
b) maksimum lokalne jeżeli $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$.

Uwaga.
Jeżeli $W < 0$ to ekstremum nie istnieje,
W=0, to kryterium nie rozstrzyga.

Przykłady: