Wykład 8: szeregi trygonometryczne Fouriera

Definicja 1 *Szeregiem trygonometrycznym nazywamy szereg postaci:*

$$\frac{1}{2}a_0 + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + b_2\sin 2x) + \ldots = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

Definicja 2 *Szeregiem Fouriera odpowiadającyn danej funkcji f, całkowalnej w przedziale $\langle -\pi, \pi\rangle$ nazywamy szereg trygonometryczny, którego współczynniki a_n i b_n dane są wzorami:*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad dla\;\; n = 0, 1, 2, ...$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad dla\;\; n = 1, 2, ...$$

Mamy:

$$f(x) \;\sim\; \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

Szereg Fouriera może być zbieżny lub rozbieżny. Ale nawet wtedy gdy jest zbieżny, suma jego nie musi byś równa $f(x)$. Kiedy zachodzi równość:

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

Definicja 3 *Funkcja $f(x)$ ograniczona w $\langle a, b\rangle$ nazywa się przedziałami monotoniczną w $\langle a, b\rangle$, jeśli przedział ten można podzielić na skończiną liczbę podprzedziałów, w których $f(x)$ jest monotoniczna.*

Definicja 4 *Funkcja f spełnia w przedziale $\langle a, b\rangle$ warunki Dirichleta jeśli:*

1. *jest w (a, b) przedziałami monotoniczna,*
2. $\forall x_0 \in (a, b)\; f(x_0) = \frac{1}{2}(\lim_{x\to x_0^+} f(x) + \lim_{x\to x_0^-} f(x))$,
3. $f(a) = f(b) = \frac{1}{2}(\lim_{x\to a^+} f(x) + \lim_{x\to b^-} f(x))$

Twierdzenie 1 *Jeśli funkcja $f(x)$ spełnia w $\langle -\pi, \pi \rangle$ warunki Dirichleta, to szereg Fouriera funkcji f jest zbieżny wszędzie w R do funkcji f.*

Przykład:

Własność:

1) jeżeli funkcja f jest parzysta (czyli $f(x) = f(-x)$), to

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= 0 \end{aligned}$$

Wtedy szereg Fouriera jest "szeregiem cosinusów".

2) jeżeli funkcja f jest nieparzysta (czyli $f(-x) = -f(x)$), to

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx, \end{aligned}$$

Wtedy szereg Fouriera jest "szeregiem sinusów".

Rozwijanie dowolnej funkcji w szereg samych cosinusów lub samych sinusów

Jeżeli funkcja f spełnia warunki Dirichleta w $\langle 0, \pi \rangle$ i tylko w tym przedziale chcemy ją rozwinąć, to możemy przedłużyć ją na cały przedział $\langle -\pi, \pi \rangle$ w sposób parzysty lub nieparzysty.
Przykład:

Szereg Fouriera w przedziale $\langle -h, h \rangle,\ h > 0$

Niech funkcja f całkowalna w $\langle -h, h \rangle$.

$$f(x)\ \sim\ \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{h} + b_n \sin\frac{n\pi x}{h})$$

$$a_n = \frac{1}{h}\int_{-h}^{h} f(x)\cos\frac{n\pi x}{h}dx, \quad \text{dla}\ \ n = 0, 1, 2, ...$$
$$b_n = \frac{1}{h}\int_{-h}^{h} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx, \quad \text{dla}\ \ n = 1, 2, ...$$