Wykład 9: równania różniczkowe zwyczajne I rzędu

Definicja 1. *Równaniem różniczkowym I rzędu nazywamy równanie* $y' = f(x, y)$ *(postać normalna) lub* $(*)$ $F(x, y, y') = 0$ *(postać ogólna), z niewiadomą funkcją* y*.*

Funkcję $y = y(x)$ nazywamy całką równania $(*)$ na (a, b), jeżeli jest ona różniczkowalna na tym przedziale i jeżeli spełnia ona to równanie, czyli: $F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0$.

Przykład:

Definicja 2. *Równanie* $(*)$ *oraz warunek* $y_0 = y(x_0)$ *nazywamy zagadnieniem początkowym (Cauche'go).*

W interpretacji geometrycznej, rozwiązanie zagadnienia początkowego polega na wybraniu z rodziny krzywych dokładnie jednej przechodzącej przez punkt (x_0, y_0).

Twierdzenie 1. *[o jednoznaczności rozwiązania równania $(*)$] Jeżeli funkcja $f(x, y)$ oraz jej pochodna cząstkowa f'_y są ciągłe na obszarze $D \subset R^2$ oraz $(x_0, y_0) \in D$, to zagadnienie początkowe ma dokładnie jedno rozwiązanie.*

RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE O ROZDZIELONYCH ZMIENNYCH

$$y' = h(x)g(y)$$

Rozwiązujemy je przez rozdzielenie zmiennych i scałkowanie stronami:

$$\frac{dy}{dx} = h(x)g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = h(x)dx, \quad g(y) \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)dx,$$

Przykład:

RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE JEDNORODNE

$$(J) \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Sprowadzamy je do równania o rozdzielonych zmiennych przez podstawienie:

$$\frac{y}{x} = u(x)$$

Wtedy:

$$y = u(x)x$$

I

$$y' = u'(x)x + u(x)$$

Po podstawieniu do (J) mamy

$$u'x + u = f(u)$$

czyli:

$$u'x = f(u) - u$$

czyli równanie o rozdzielonych zmiennych.

Przykład:

RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE LINIOWE

$$(RN) \quad y' + p(x)y = q(x)$$

Jeżeli $q(x) \not\equiv 0$ to nazywamy je równaniem niejednorodnym; w przeciwnym wypadku - jednorodnym - (RJ).

Kolejność rozwiązywania równania (RN), (metoda uzmienniania stałych):

1. Rozwiązujemy równanie (RJ) - jest to równanie o rozdzielonych zmiennych - otrzymujemy całkę ogólną równania jednorodnego - CORJ
2. Uzmienniamy stałą w CORJ, podstawiamy do (RN) i otrzymujemy po rozwiązaniu równania o rozdzielonych zmiennych szukaną funkcję $c(x)$ oraz całkę szczególną równania niejednorodnego - CSRN.

3. Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego otrzymamy następująco:
   CORN=CORJ+CSRN

Przykład:

RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE BERNOULLIEGO

$$(RB) \quad y' + p(x)y = q(x)y^r, \quad r \neq 0, \ \ r \neq 1$$

Sprowadzamy je do równania liniowego przez podstawienie: $z(x) = y^{1-r}$.
Wtedy: $z' = (1-r)y^{(} - r)y'$, czyli: $\frac{y'}{y^r} = \frac{z'}{1-r}$. Dzielimy równanie (RB) przez $y^r \neq 0$ i otrzymamy:

$$\frac{y'}{y^r} + p(x)\frac{y}{y^r} = q(x)$$

czyli:

$$(RB) \;\; \frac{y'}{y^r} + p(x)y^{1-r} = q(x)$$

Po podstawieniu nowej funkcji $z(x)$ mamy:

$$(RB) \;\; \frac{z'}{1-r} + p(x)z = q(x)$$

czyli równanie liniowe.
Przykład: